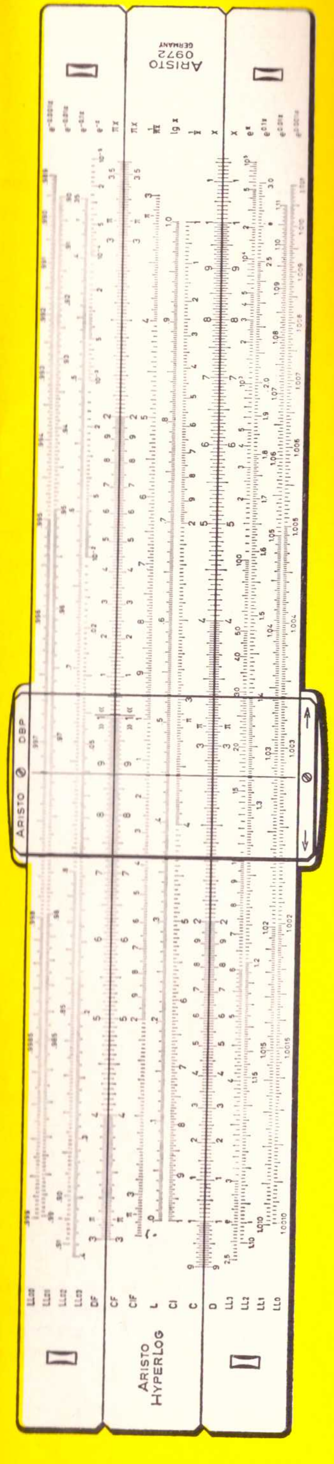
ANLEITUNG
ZUM
RECHENSTAB

ARISTO

HYPERLOG

0972

Normzahlen-Maßstab 1364



Printed in Germany by Borek KG. · 1681

INHALT

1. Allgemeines

Diese Gebrauchsanleitung gibt Auskunft über die Skalen des Rechenstabes, ihre Bereiche und ihren Verwendungszweck. Es wird erklärt, wie mit den Skalen gerechnet wird und welche Beziehungen untereinander bestehen. Für jede Skala sind Beispiele angegeben, um das Prinzip zu erläutern. Wie in einer Formelsammlung ist das Wichtigste zusammengestellt.

Zum Stabrechnen gehört Übung! Für Übungen und ausführliche Erläuterungen empfehlen wir die Lehrbücher:

Hassenpflug: Der Rechenstab ARISTO-Studio
Stender/Schuchardt: Der moderne Rechenstab

1.1 Handhabung des Rechenstabes

Zum Rechnen wird der Rechenstab am besten in die Hand genommen und so zum Licht gedreht, daß der Läuferstrich keine Schatten werfen kann. Das Einstellen der Zunge erfolgt am genauesten durch Druck und Gegendruck. Mit der einen Hand wird das herausragende Zungenende mit Daumen und Zeigefinger dicht hinter dem Rechenstabkörper umfaßt, so daß durch Bewegen der Finger bei gleichzeitigem Abstützen gegen den Stabkörper Zug- und Druckbewegungen möglich sind. Mit der anderen Hand wird die obere Leiste des Rechenstabkörpers so umfaßt, daß die Daumenspitze einen Gegendruck auf das Zungenende ausüben kann.

Das Einstellen des Läufers kann mit einer Hand vorgenommen werden, genauer und schneller aber mit Daumen und Zeigefinger beider Hände. Damit der Läufer nicht verkantet und der Läuferstrich immer senkrecht zu den Teilungen geführt wird, soll die Führungskante des Läufers, die der Läuferfeder gegenüber liegt, leicht gegen die Stabkante gedrückt werden.

1.2 Eigentumsvermerk

Im Etui befindet sich unter dem ARISTO-Normzahlen-Maßstab 1364 ein transparenter Einsatz, der als Fach für den Maßstab dient. Das darunter eingeschobene Kärtchen kann nach Aufbiegen der transparenten Lasche herausgenommen und mit dem Namen beschrieben werden.

1.3 Die Behandlung des ARISTO-Rechenstabes

Der Rechenstab ist ein wertvolles Rechenhilfsmittel und braucht eine pflegliche Behandlung. Die Skalen und der Läufer sind vor Verschmutzung und Kratzern zu schützen, damit die Ablesegenauigkeit nicht beeinträchtigt wird.

Es empfiehlt sich, den Rechenstab von Zeit zu Zeit mit dem Spezialreinigungsmittel DEPAROL zu reinigen und trocken nachzupolieren. Keinesfalls dürfen irgendwelche Chemikalien verwendet werden, da diese die Teilung zerstören können.

Der Rechenstab ist vor Plastik-Radierern und ihren Abriebprodukten zu schützen, da diese die Oberfläche des ARISTOPAL beschädigen können. Ferner ist eine Lagerung an heißen Plätzen, z. B. auf Heizkörpern oder in praller Sonne, zu vermeiden, da bei höheren Temperaturen als etwa 60° C Verformungen auftreten. Für derart beschädigte Rechenstäbe wird kein Ersatz geleistet.

1.4 Abnehmen des Läufers

Die Läuferstriche sind zum Skalenbild so justiert, daß während der Rechnung der Übergang von einer Seite des Rechenstabes zur anderen möglich ist. Der Läufer kann zum Zwecke der Reinigung abgenommen werden, ohne daß dabei die Justierung verlorengeht. Auf einer Seite sind die Läufergläser mit vier Schrauben, auf der anderen Seite mit zwei als Druckknöpfe ausgebildeten Schrauben an den Läuferstegen befestigt. Zum Abnehmen des Läufers vom Rechenstab werden die mit den Pfeilen markierten Enden des Läufersteges mit den Daumennagelspitzen nach unten gedrückt, damit sich der Druckknopf öffnet. Der obere Druckknopf öffnet sich beim Hochklappen des Läuferglases.

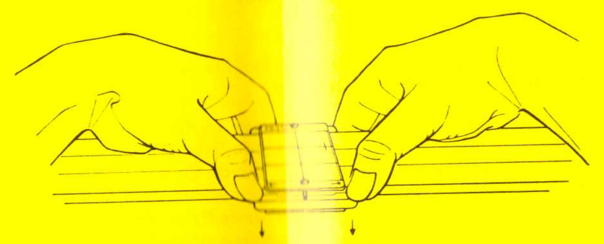


Abb. 1

1.5 Justieren des Läufers

Falls gelegentlich eine Justierung erforderlich ist, z. B. beim Aufsetzen eines Ersatzläufers, wird der Rechenstab so auf den Tisch gelegt, daß die Läuferseite mit den vier Schrauben oben liegt. Nach Lockerung dieser vier Schrauben mit einem passenden Schraubenzieher wird der Rechenstab umgedreht und der Läuferstrich genau über die 1 von Skala D und Marke π in Skala DF gestellt. Die e-Marke in LL2 und die Hilfsmarke in LL02 sind weitere Hilfen. Vorsichtig wird der Rechenstab wieder gewendet, ohne den Läufer zu bewegen, und dann bei festgehaltenem Läufer das obenliegende Läuferglas nach den Endwerten 1 und 1000 der Skalen DI und K ausgerichtet. Danach werden die vier Schrauben wieder fest angezogen.

1.6 Diagrammdarstellung der Beispiele

Im folgenden soll eine abgekürzte Darstellungsweise der Beispiele angewendet werden, die den Lösungsweg und die Reihenfolge der Einstellungen besser angibt als die übliche Abbildung des Rechenstabes. Die Skalen werden durch parallele Linien angedeutet, an deren Ende die Benennung steht. Folgende Symbole ermöglichen das Lesen der Diagramme:

Anfangseinstellung
Jede weitere Einstellung
Endergebnis
Einstellung oder Ablesung eines Zwischenergebnisses
Wenden des Rechenstabes
Pfeile geben die Reihenfolge und Bewegungsrichtung an
Ein senkrechter Strich stellt den Läufer dar

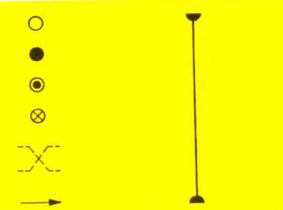


Abb. 2

2. Skalenanordnung des ARISTO-HyperLog

Log-Log-Seite

LL00	Exponentialskala, Bereich 0,999 bis 0,989	$e^{-0,001x}$		auf dem Körper
LL01	0,99 bis 0,9	$e^{-0,01x}$		
LL02	0,91 bis 0,35	$e^{-0,1x}$		
LL03	0,4 bis 10^{-5}	e^{-x}		
DF	Um π versetzte Grundskala	πx		
CF	Um π versetzte Grundskala	πx		auf der Zunge
CIF	Kehrwertskala zu CF	$1/\pi x$		
L	Mantissenskala	lg x		
CI	Kehrwertskala zu C	1/x		
C	Grundskala	x		
D	Grundskala	x		auf dem Körper
LL3	Exponentialskala, Bereich 2,5 bis 10^5	e^x		
LL2	1,1 bis 3,0	$e^{0,1x}$		
LL1	1,01 bis 1,11	$e^{0,01x}$		
LL0	1,001 bis 1,011	$e^{0,001x}$		

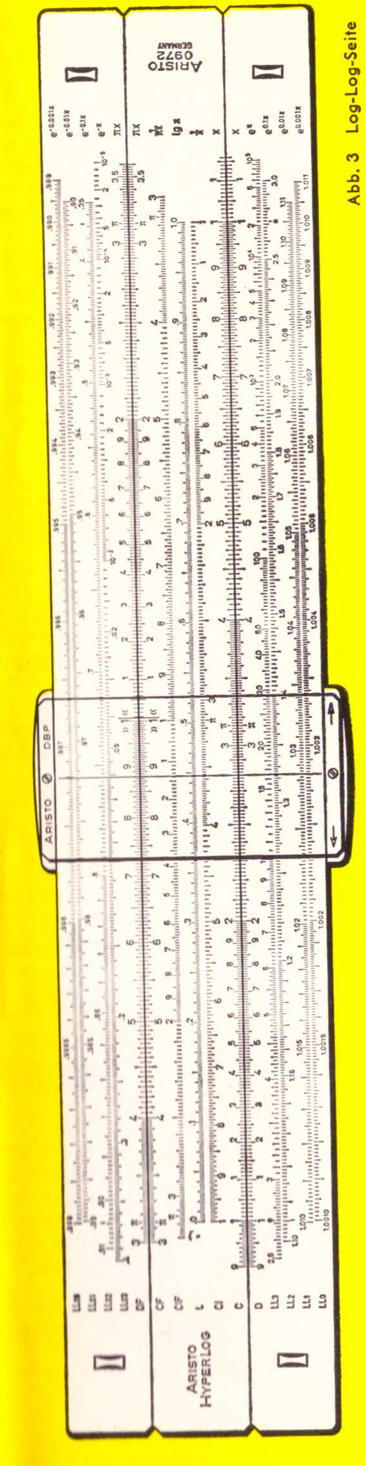


Abb. 3 Log-Log-Seite

Hyperbelseite

H2	Hyperbelskala,	Bereich 1,4	bis 10	$\sqrt{1+x^2}$	auf dem Körper
Sh2	Skala des hyperbolischen Sinus,	Bereich 0,85	bis 3	$\sphericalangle$ sinh	
Th	Skala des hyperbolischen Tangens,	Bereich 0,1	bis 3	$\sphericalangle$ tanh	
K	Kubikskala			x^3	
A	Quadratskala			x^2	
B	Quadratskala			x^2	auf der Zunge
T	Tangensskala bzw. Kotangensskala für 5,5° bis 45°			$\sphericalangle$ tan	
ST	Tangens-, Sinus- und arc-Skala für 0,55° bis 6°			$\sphericalangle$ arc	
S	Sinusskalen für 5,5° bis 90°			$\sphericalangle$ sin $\sphericalangle$ cos	
P	Pythagoreische Skala,	Bereich 0	bis 0,995	$\sqrt{1-x^2}$	
C	Grundskala			x	
D	Grundskala			x	auf dem Körper
DI	Kehrwertskala zu D			1/x	
Ch	Skala des hyperbolischen Kosinus,	Bereich 0	bis 3	$\sphericalangle$ cosh	
Sh1	Skala des hyperbolischen Sinus,	Bereich 0,1	bis 0,9	$\sphericalangle$ sinh	
H1	Hyperbelskala,	Bereich 1,005 bis 1,5		$\sqrt{1+x^2}$	

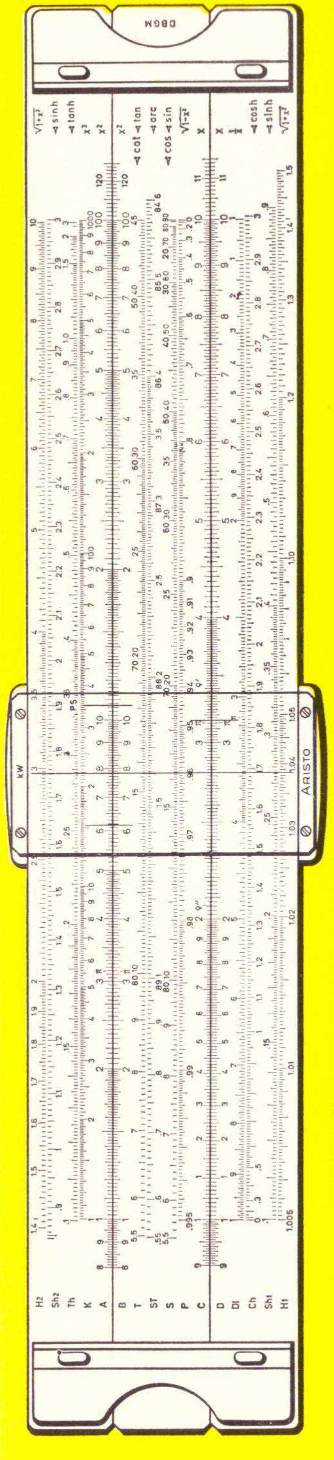


Abb. 4 Hyperbelseite

3. Lesen der Skalen

Für den Gebrauch des Rechenstabes ist es wesentlich, die Skalen schnell und sicher abzulesen. Die Abbildungen 5 bis 8 zeigen Ablesebeispiele auf den am meisten benutzten Grundskalen C und D. Die Hauptintervalle sind durch lange Teilstriche mit den Ziffern 1 bis 10 gekennzeichnet (Abb. 5). Die 10 ist auf der Winkelseite wieder als 1 bezeichnet, da dieser Teilstrich als Beginn einer neuen Skala angesehen werden kann, die mit der vorausgehenden identisch ist.

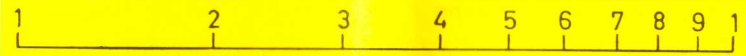


Abb. 5 Die Hauptintervalle

Im Bereich der Ziffern 1 bis 2 ähnelt die Skala dem Teilungsbild eines Millimeter-Maßstabes, der Unterschied besteht nur darin, daß die Teilungsintervalle nach rechts hin immer kleiner werden.

Abb. 6 Ablesen im Bereich von 1 bis 2

Die Ziffer 2 eines Millimeter-Maßstabes kann 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m usw. gelesen werden; d. h. abgesehen von der Dimension tritt die 2 in Verbindung mit verschiedenen Zehnerpotenzen auf. Ähnlich sagt auch die Ziffer der Rechenstabskala nichts über die Kommastellung aus. Deshalb ist es ratsam, nur Ziffernfolgen ohne Komma abzulesen und die Ziffern einzeln zu sprechen, z. B. Eins-Drei-Vier, nicht aber einhundertvierunddreißig. Dann werden keine Ziffern vertauscht oder ausgelassen. Verschiebt man zur Übung den Läuferstrich langsam vom Wert 1 nach rechts, liest man an jedem einzelnen Teilstrich ab: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 usw.

Der Läuferstrich ist im Vergleich zur Breite des Intervalls so dünn, daß die Mitte zwischen zwei Teilstrichen sicher eingestellt werden kann. Das Auge unterscheidet aber auch kleine Bruchteile eines Intervalls, so daß man bei einiger Übung den zehnten Teil des Intervalls schätzen kann und damit die vierte Stelle erhält.

Zur Übung wird der Läuferstrich langsam weiter nach rechts verschoben, zwischen den Teilstrichen 1310 und 1320 wird beispielsweise geschätzt: 1311, 1312, 1313, 1314, 1315 usw.

Zwischen einem bezifferten Teilstrich und dem ihm folgenden sind die Nullen zu beachten, besonders am Beginn der Skala, z. B. 1000, 1001, 1002, 1003 usw. (vgl. 1007 in Abb. 6).

Abb. 7 Ablesen im Bereich von 2 bis 4

Da die Teilungsintervalle links von der Ziffer 2 bereits sehr eng werden, ist in dem daran anschließenden Bereich zwischen den Ziffern 2 und 4 nur noch jeder zweite Teilstrich eingraviert; daraus ergibt sich ein neues Teilungsbild, bei dem von Strich zu Strich die geraden Werte abgezählt werden: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214 usw. Die Mitten der Intervalle geben die ungeraden Werte an: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213 usw. Abb. 7 zeigt einige Ablesebeispiele.

Abb. 8 Ablesen im Bereich von 4 bis 10

Im Bereich von 4 bis 10 springen die Markierungen um 5 Einheiten, so daß die Ablesungen an den aufeinanderfolgenden Teilstrichen 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430 usw. lauten.

Die Zwischenwerte müssen geschätzt werden, in der Mitte zwischen 400 und 405 liegt der Wert 4025, etwas links davon 402, etwas rechts 403. Entsprechend gibt die Mitte des nächsten Intervalls den Wert 4075 an. Abb. 8 zeigt eine Reihe von Einstellungen.

4. Überschlagsrechnung

Im Kapitel 3 wird betont, daß auf dem Rechenstab ausschließlich Ziffernfolgen eingestellt und abgelesen werden. Erst mit einer groben Überschlagsrechnung wird die richtige Kommastellung im Rechenergebnis festgelegt und damit gleichzeitig eine Kontrolle für die erste Ziffer der Stabrechnung durchgeführt.

Regeln für Überschlagsrechnungen:

Zahlenwerte stark abrunden!

z. B. $3{,}43 \approx 3$ $\quad 9{,}51 \approx 10$ $\quad 7{,}61 \approx 8$

Bei Multiplikationen den einen Faktor aufrunden, den anderen abrunden!

z. B. $8{,}92 \cdot 127 \approx 10 \cdot 120 = 1200$

$2{,}19 \cdot 9830 \approx 2 \cdot 10000 \approx 20000$

Divisionen durch Kürzen vereinfachen!
Zähler und Nenner werden in der gleichen Richtung abgerundet.

z. B. $\frac{725}{539} = \frac{7{,}25}{5{,}39} \approx \frac{7}{5} \approx 1{,}4$

$\frac{640 \cdot 15{,}3}{51 \cdot 0{,}8} \approx \frac{60 \cdot 20}{5 \cdot 1} \approx 240$

Das Abspalten von Zehnerpotenzen erleichtert das Rechnen mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlenwerten.

z. B. $73215 \approx 7 \cdot 10^4$ $\quad 0{,}0078 \approx 8 \cdot 10^{-3}$

$89 \approx 9 \cdot 10^1$ $\quad 0{,}706 \approx 7 \cdot 10^{-1}$

Beim Multiplizieren bzw. Dividieren mit sehr großen und sehr kleinen Zahlenwerten gewährleistet das Abspalten von Zehnerpotenzen eine bessere Übersichtlichkeit!

z. B. $0{,}07325 \cdot 0{,}000513 \approx 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \approx 40 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-5}$

$\frac{2950}{0{,}00598} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}5 \cdot 10^6$

5. Rechenprinzip

Gerechnet wird derart, daß Strecken mechanisch addiert oder subtrahiert werden. Auf einfachste Weise kann die Rechenmethode anhand zweier gegeneinander verschiebbarer Millimeter-Maßstäbe erklärt werden.

Abb. 9 zeigt das Beispiel $2 + 3 = 5$. Wenn der Anfang des oberen Maßstabes über den Wert 2 des unteren Maßstabes gelegt wird, kann zu dieser eingestellten Strecke 2 mit Hilfe der oberen Skala beispielsweise die Strecke 3 addiert werden. Unter der 3 des oberen Maßstabes steht das Ergebnis 5 in dem unteren Maßstab. In der Abb. 9 könnte ebenfalls abgelesen werden $2 + 1 = 3$ oder $20 + 15 = 35$, wenn die Millimeter abgezählt werden.

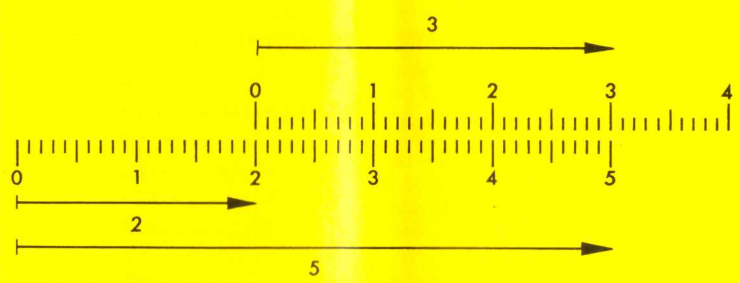


Abb. 9 Graphische Addition mit Skalen

Auch die Subtraktion $5 - 3 = 2$ läßt sich aus der Abb. 9 ablesen, der Vorgang wird dann nur umgekehrt. Von der Strecke 5 der unteren Skala wird die Strecke 3 der oberen Skala abgezogen, dazu werden die Werte 5 und 3 übereinandergestellt und unter dem Anfang der oberen Skala steht das Ergebnis 2 in der unteren Skala.

Beim Rechenstab befinden sich die Teilungen auf einem festen Körper und auf einer darin verschiebbaren Zunge. Die Eigenart des Rechenstabes besteht darin, daß logarithmisch geteilte Skalen aufgetragen sind. Die graphische Addition zweier Strecken ergibt damit eine Multiplikation, und die Subtraktion wird zur Division.

6. Multiplikation

(Zwei Strecken werden addiert)

Der Zungenanfang 1 der Skala C wird über den Wert 18 von D gestellt. Durch Verschieben des Läufers zum Wert 13 der Skala C wird die Strecke 13 zur Strecke 18 addiert, und das Ergebnis 234 kann unter dem Läuferstrich auf Skala D abgelesen werden. Aus einer groben Überschlagsrechnung etwa ($20 \cdot 10 = 200$) ergibt sich die Kommastellung.

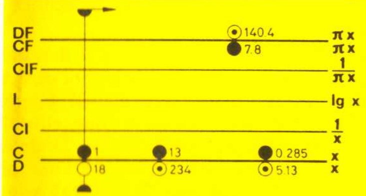


Abb. 10 $18 \cdot 13 = 234$
$18 \cdot 0{,}285 = 5{,}13$
$18 \cdot 7{,}8 = 140{,}4$

Zum Ablesen der Aufgabe $18 \cdot 7{,}8$ wird die Zunge durchgeschoben, d. h. das Skalenende der Skala C über 18 in D gestellt. Beim ARISTO-HyperLog läßt sich diese zusätzliche Zungeneinstellung aber vermeiden, wenn man mit dem oberen Skalenpaar CF/DF weiterrechnet.

Die Skalen CF und DF ermöglichen diese vereinfachte Rechnung, weil sie eine Wiederholung der Grundskalen C und D mit dem Unterschied sind, daß ihr Skalenanfang 1 ungefähr in der Mitte des Rechenstabes liegt. Wenn sich z. B. im unteren Skalenpaar die Werte 1 auf Skala C und 18 auf Skala D gegenüberstehen, so ist beim oberen Skalenpaar die gleiche Einstellung ablesbar, nämlich 1 auf Skala CF unter 18 auf Skala DF und folglich kann in beiden Skalenpaaren mit dem Faktor 18 multipliziert werden. Die Aufgabe $18 \cdot 7{,}8$ wird mit den Skalen CF/DF gerechnet, indem der Läuferstrich auf 7,8 in Skala CF gebracht und in Skala DF 140,4 abgelesen wird.

7. Division

(Subtraktion zweier Strecken, Umkehrung der Multiplikation)

Der Läuferstrich wird über den Wert 2620 in D gestellt und die Zahl 17,7 der Skala C unter den Läuferstrich geschoben, so daß beide Werte einander gegenüber stehen. Das Ergebnis 148 wird unter dem Zungenanfang der Skala C abgelesen, bei anderen Beispielen gegebenenfalls unter dem Zungenende.

Abb. 11

Überschlag 2620 : 17,7 = 148
3000 : 20 = 150

Über der 1 in CF kann das Ergebnis auf der Skala DF natürlich ebenfalls abgelesen werden, weil auch in den Skalen CF/DF die Aufgabe 2620 : 17,7 eingestellt ist.

Dieselbe Zungeneinstellung gilt aber auch für die Multiplikation 148 · 17,7 = 2620. Der Unterschied zwischen der Multiplikation und Division besteht nur in der Reihenfolge der Einstellungen. Bei der Division wird das Ergebnis jeweils gegenüber dem Skalenanfang oder -ende der Zunge auf dem Körper abgelesen. Ein Durchschieben gibt es nicht. Dieser Vorteil wird in den folgenden Kapiteln wiederholt ausgenutzt werden.

8. Die versetzten Skalen CF und DF

Die Skalen CF und DF sind eine Wiederholung der Grundskalen C und D, gegen diese aber so versetzt, daß $\pi = 3{,}142$ in CF bzw. DF genau über dem Skalenanfang oder -ende der Grundskalen C bzw. D steht. Ihr Wert 1 liegt etwa in der Rechenstabmitte, so daß mit den versetzten Skalen eine Überteilung der Grundskalen von einer halben Stablänge erzielt wird. Beide Skalenpaare C/D und CF/DF bilden somit eine Arbeitsgemeinschaft, aus der erhebliche Rechenvorteile beim Multiplizieren, Tabellenrechnen und bei Proportionsrechnungen resultieren.

Der Index 1 der Skala CF zeigt stets auf den gleichen Wert von DF wie die 1 oder 10 der Skala C auf D. Die bisher ausgeführten Multiplikationen können auch mit dem oberen Skalenpaar CF/DF begonnen werden, und zwar mit dem Vorteil, daß immer die richtige Anfangseinstellung gewählt wird. Die Entscheidung, ob mit dem linken oder rechten Skalenende angefangen werden muß, ist dann unnötig. Wird eine Division mit den oberen Skalen eingestellt, so stehen Zähler und Nenner auf dem Rechenstab wie in der Bruchschreibweise übereinander.

Kann das Ergebnis einer Aufgabe in dem einen Skalenpaar nicht mehr abgelesen werden, so ist die Ablesung stets im anderen möglich, ein Durchschieben der Zunge gibt es nicht. Die gelben Farbzeilen auf der Zunge sollen daran erinnern, daß die Faktoren auf den beweglichen Zungenskalen C und CF eingestellt werden und das Ergebnis auf D unter C oder auf DF über CF abgelesen wird.

8.1 Tabellenrechnung ohne „Durchschieben" der Zunge

$$y = 29\,x$$

x	1,7	3,45	5,0	10
y	49,3	100	145	290

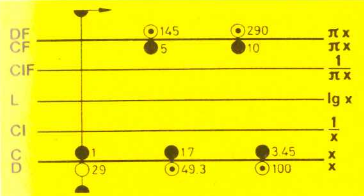


Abb. 12

Für x = 5 kann ohne Durchschieben der Zunge auf dem oberen Skalenpaar CF und DF abgelesen werden.

$$y = \frac{28{,}2}{x} = 28{,}2 \cdot \frac{1}{x}$$

x	7,43	2,92	1,567
y	3,795	9,66	18,0

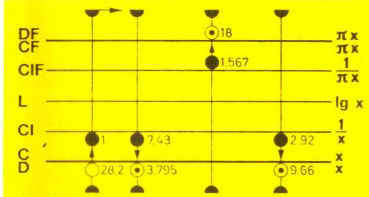


Abb. 13

$$y = \frac{x}{18{,}2} = \frac{1}{18{,}2} \cdot x$$

x	3,17	112,1
y	0,1742	6,16

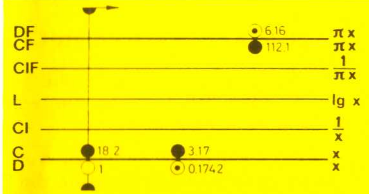


Abb. 14

8.2 Direkte Ablesung von Multiplikationen und Divisionen mit der Zahl π

Da die Skalen CF und DF um den Wert π versetzt sind, ergibt sich der weitere Vorteil, daß beim Übergang von D nach DF bzw. C nach CF eine Multiplikation und in der umgekehrten Richtung eine Division mit π ausgeführt wird. Wenn z. B. der Durchmesser d auf Skala D mit dem Läuferstrich eingestellt wird, kann darüber auf der Skala DF der Kreisumfang $U = \pi\, d$ abgelesen werden. Ähnlich berechnet man die Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\, f$, wenn 2 f in D eingestellt wird.

Bei allen Aufgaben, die den Faktor π enthalten, wird dieser bei der letzten Ablesung durch einen Übergang zu den versetzten Skalen berücksichtigt. Eine Zusammenstellung aller Rechnungen mit dem Faktor π, die mit einer Läufereinstellung möglich sind, zeigt die Abb. 15. Berechnungen mit dem Faktor 360 vergleiche Kap. 24.1.

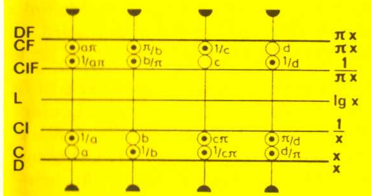


Abb. 15 Rechnen mit π

9. Vereinigte Multiplikation und Division

Bei Rechnungen mit Ausdrücken der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ gilt der Grundsatz:

Zuerst dividieren, dann multiplizieren. Nach der Division 345 : 132 in Abb. 16 braucht das Zwischenergebnis 2,61 nicht abgelesen zu werden, denn der Rechenstab ist bereits für die anschließende Multiplikation eingestellt. Der Läufer wird zum Wert 22 der Skala C verschoben, darunter steht dann das Ergebnis 57,5 in Skala D.

Abb. 16

$$\frac{345}{132} \cdot 22 = 57{,}5$$

Überschlag

$$\frac{300}{100} \cdot 20 = 60$$

Wird dieses Beispiel durch einen im Nenner stehenden Faktor 19,5 erweitert,

$$\frac{345 \cdot 22}{132 \cdot 19{,}5} = 2{,}95$$

kann anschließend an die Lösung in Abb. 16 dividiert werden, indem der Wert 19,5 der Skala C unter den Läuferstrich gebracht wird, so daß 57,5 durch 19,5 geteilt wird. Stehen bei derartigen Aufgaben weitere Faktoren im Zähler und im Nenner, wird einfach abwechselnd dividiert und multipliziert. Die rhythmische Abwechslung von Zungen- und Läufereinstellungen sorgt für einen gleichbleibenden Fluß der Rechnung mit einem Minimum an Einstellungen.

Es kann bei derartigen Aufgaben vorkommen, daß die Zunge nach der Division zu weit aus dem Rechenstab herausragt und die Zunge vor der Multiplikation durchgeschoben werden muß. Durch die richtige Wahl der Divisionseinstellung mit C/D oder CF/DF läßt sich dieser Sonderfall oft vermeiden.

10. Die Kehrwertskalen CI und CIF

Die Skala CI ist genauso unterteilt wie die Grundskalen C und D, sie verläuft in der umgekehrten Richtung von rechts nach links und ist zur Vermeidung von Ablesefehlern rot beziffert.

Wird der Läufer auf irgendeinen Wert x in Skala C gestellt, kann sein Kehrwert 1/x in CI abgelesen werden, wie die Skalenbezeichnung am rechten Rand angibt. Über 5 in C steht 1/5 = 0,2 in CI. Wichtiger ist aber, daß die Kehrwertbildung auch für die umgekehrte Richtung gilt, nämlich beim Übergang von CI nach C; z. B. steht unter 4 in CI der Wert 1/4 = 0,25 in C.

Ein nur gelegentliches Ablesen von Kehrwerten würde das Vorhandensein der Skala CI nicht rechtfertigen. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie viel unnötige Einstellarbeit bei zusammengesetzten Aufgaben erspart.

$\frac{4}{5}$ kann als $4 \cdot \frac{1}{5}$ geschrieben werden und $4 \cdot 5$ ist das Gleiche wie $\frac{4}{1/5}$.

Diese Schreibweise ist zwar ungewohnt, hat aber für das Stabrechnen den Vorteil, daß eine Division in eine Multiplikation und umgekehrt eine Multiplikation in eine Division umgewandelt wird. Ein „Spiel" mit einfachen Zahlen wird uns den Wert dieser Umformung am besten zeigen:

1. Bringen wir den Läufer über 6 in D und schieben 2 in C unter den Läuferstrich, dann haben wir die übliche Division 6 : 2 = 3 (Abb. 17). Lassen wir aber den Läufer stehen und bringen durch Verschieben der Zunge die 2 der Skala CI darunter, so erhalten wir die Multiplikation 6 · 2, wobei wir das Ergebnis 12 wie bei einer Division unter der Zungeneins ablesen (Abb. 18). In Wirklichkeit haben wir 6 : 0,5 ausgerechnet, weil mit der 2 in CI gleichzeitig der Kehrwert 0,5 in C unter den Läuferstrich gebracht wurde.

2. Lassen wir jetzt die Eins der Skala C über 12 in D stehen und bringen den Läufer auf 4 in C, dann erhalten wir die übliche Multiplikation 12 · 4 = 48 (Abb. 19). Verschieben wir aber den Läufer nach 4 in CI, so lesen wir das Ergebnis der Division 12 : 4 = 3 in D ab (Abb. 20). Mit anderen Worten: Da unter 4 in CI der Kehrwert 1/4 = 0,25 in C steht, ist in Wirklichkeit 12 · 0,25 = 3 gerechnet worden.

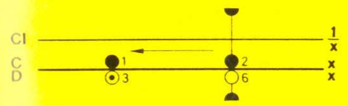


Abb. 17

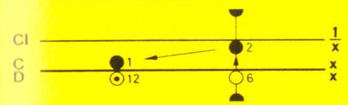


Abb. 18

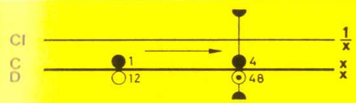


Abb. 19

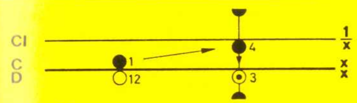


Abb. 20

Es gibt für die Multiplikation und Division also je zwei Einstellmöglichkeiten, von denen sich der geübte Rechner jeweils die bessere aussucht, um bei zusammengesetzten Aufgaben eine abwechselnde Division und Multiplikation zu erhalten.

Die bisher zwischen den Skalen C und CI geschilderten Beziehungen gelten in gleicher Weise auch für die Skalen CF und CIF. Um das einzusehen, ist es nützlich, dasselbe „Zahlenspiel" mit der Skalengruppe CF/DF/CIF zu wiederholen.

Wer die vorhergehenden Kapitel aufmerksam studiert hat, wird jetzt erkennen, daß die Skala CIF die folgerichtige Ergänzung des Skalensystems ist. Und wer die Vorteile der versetzten Skalen richtig ausnutzt, braucht die Skala CIF genau so oft wie die Skala CI.

Ausdrücke der Form $a \cdot b \cdot c$ oder $\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$ usw. werden durch abwechselnde Multiplikation und Division wie die Aufgaben der vereinigten Multiplikation und Division (Kap. 9) gelöst. Während der Rechnung kann von der Skalengruppe C, D und CI zur Skalengruppe CF, DF und CIF übergegangen werden, um bei der Multiplikation das Durchschieben der Zunge zu vermeiden.

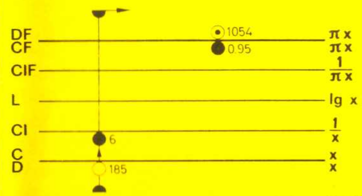


Abb. 21 $185 \cdot 6 \cdot 0{,}95 = 1054$
Überschlag $200 \cdot 6 \cdot 1 = 1200$

Im Beispiel der Abb. 21 werden 185 auf Skala D und 6 auf Skala CI wie bei einer Division gegenübergestellt und die Multiplikation mit 0,95 auf der oberen Skala CF vorgenommen. Das Ergebnis 1054 erscheint darüber in der Skala DF.

10.1 Die Kehrwertskala DI

Die Kehrwertskala DI bringt dem geübten Stabrechner Vorteile, wenn gelegentlich bei einem Rechenvorgang die Funktionen der Körperskalen und Zungenskalen vertauscht werden, z. B. beim Rechnen mit Proportionen. Es wird empfohlen, einfache Multiplikationen und Divisionen mit den Skalen C und DI durchzuführen.

11. Proportionen

Proportionen der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ sind mit dem Rechenstab besonders einfach und übersichtlich zu rechnen, weil mit der Einstellung eines Verhältnisses alle weiteren Relationen durch Verschieben des Läufers abgelesen werden. Die Trennungslinie zwischen der Körper- und Zungenskala bildet dabei gleichsam den Bruchstrich. Daher sollte diese Rechnungsart allgemein bevorzugt werden.

Beispiel: 9,5 kg einer Ware kosten DM 6,30, wieviel kosten 8,4 kg?
Die Lösung mit dem Dreisatz lautet:

$$\frac{6{,}30}{9{,}50} \cdot 8{,}4 = 5{,}57$$

Übersichtlicher wird der Rechengang, wenn das Verhältnis der Gewichte und Preise als Proportion aufgestellt wird. Mit der Gegenüberstellung des gegebenen Gewichtes 9,5 in Skala DF und des Preises 6,30 in Skala CF stehen sich in den Skalen CF/DF und C/D alle Gewichte und Preise gegenüber, deren Verhältnis (Quotient) gleich dem eingestellten ist. DF und D stehen laut

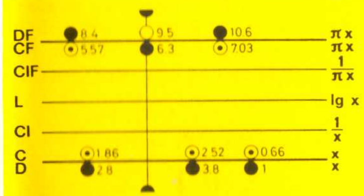


Abb. 22 Proportionen

der ersten Einstellung alle Gewichte, in Skala CF und C die dazugehörigen Preise. Gegenüber dem Gewicht 8,4 wird demzufolge der Preis 5,57 abgelesen. Weitere Gewicht-Preis-Relationen sind in der Abbildung eingezeichnet.

10,6 kg kosten DM 7,03 (in Skala CF/DF)
3,8 kg kosten DM 2,52 (in Skala C/D)
2,8 kg kosten DM 1,86 (in Skala C/D)
1 kg kostet DM 0,66 (in Skala C/D)

Die Proportion kann also beliebig fortgesetzt werden:

$$\frac{kg}{DM} \quad \frac{9{,}5}{6{,}3} = \frac{8{,}4}{5{,}57} = \frac{10{,}6}{7{,}03} = \frac{3{,}8}{2{,}52} = \frac{2{,}8}{1{,}86} = \frac{1}{0{,}66} = \ldots.$$

Die Rechnung mit Proportionen erfolgt weitgehend unabhängig von den bisherigen Regeln. Es ist gleichgültig, wo und wie sich die kg-Werte gegenüberstehen, entscheidend ist, daß die Gewichte dort aufgesucht werden, wo das erste Gewicht eingestellt wurde und daß die Preise entsprechend auf der gegenüberliegenden Skala abgelesen werden. Im obigen Beispiel könnten 6,3 in Skala DF und 9,5 in Skala CF eingestellt werden, dann müßte auch gegenüber 8,4 in CF das Ergebnis 5,57 in DF abgelesen werden.

Dieses Prinzip der direkten Proportion $a : b = c : d$ mit der Aussage je mehr-desto mehr gilt auch für die indirekten Proportionen je mehr-desto weniger bzw. je weniger-desto mehr, die zur Produktgleichheit $a \cdot b = c \cdot d$ führen und mit Hilfe der Kehrwertskalen gelöst werden. Schließlich gilt dieses Prinzip auch für die gemischten Proportionen $a \cdot b = c : d$ und $a : b = c \cdot d$.

12. Die Skalen A, B und K

Wird der Läuferstrich auf einen beliebigen Wert x der Skala D gestellt, so kann auf der Skala A das Quadrat x^2 und auf der Skala K der Kubikwert x^3 abgelesen werden. In umgekehrter Richtung erhält man die zweiten bzw. dritten Wurzeln.

a) $2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8$

b) $32{,}7^2 = 3{,}27^2 \cdot 10^2 = 1070$

$32{,}7^3 = 3{,}27^3 \cdot 10^3 = 35\,000$

c) $\sqrt[2]{9} = 3 \qquad \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[2]{51} = 7{,}14 \qquad \sqrt[3]{364} = 7{,}14$

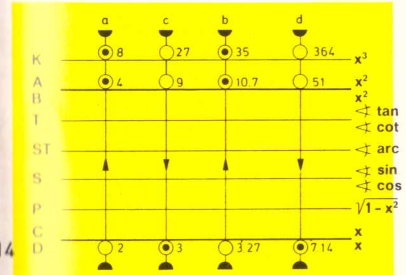


Abb. 23 Potenzen und Wurzeln

Die Stellung des Kommas erhält man am besten durch eine Überschlagsrechnung. Beim Potenzieren und Wurzelziehen ist es vorteilhaft, Zehnerpotenzen abzuspalten, um Zahlenwerte zu erhalten, deren Lösung leicht zu übersehen ist. Die Quadratskalen sind zu diesem Zweck von 1 bis 100, die Kubikskala von 1 bis 1000 beziffert. In welchem Bereich der Läufer eingestellt werden muß, ergibt sich aus dieser Bezifferung der Skalen. Beim Wurzelziehen tritt die Eigenart der Funktionsskala in Erscheinung, daß die Kommastellung neben der Ziffernfolge beachtet werden muß. Es ist nicht mehr gleichgültig, in welchem Bereich der Skala der Radikand eingestellt wird.

Beispiele:

$\sqrt{3200} = \sqrt{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{32} = 10 \cdot 5{,}66 = 56{,}6$ (Abspalten von 10^{2n})

$\sqrt[3]{0{,}1813} = \sqrt[3]{\frac{181{,}3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181{,}3} = \frac{1}{10} \cdot 5{,}66 = 0{,}566$ (Abspalten von 10^{3n})

12.1 Das Rechnen mit den Skalen A und B

Die Skalen A und B sind wie die Grundskalen C und D zwei identische Skalen mit dem Unterschied, daß zwei auf die Hälfte verkleinerte Grundskalen in ihnen aneinandergereiht sind. Ihr linker Bereich ist von 1 bis 10 und der rechte von 10 bis 100 beziffert. Mit diesen Skalen können demzufolge alle bisher besprochenen Aufgaben in gleicher Weise gelöst werden, allerdings mit etwas geringerer Genauigkeit, da für ihre Unterteilung nur die halbe Rechenstablänge zur Verfügung steht.

Bei vielen Aufgaben ist es bequem, auf der Quadratskala weiterrechnen zu können, wenn mit einer Quadrierung begonnen wurde.

Die nebeneinander angeordneten Skalen haben den Vorteil, daß ein Durchschieben der Zunge grundsätzlich nicht vorkommt.

13. Die pythagoreischen Skalen

13.1 Die Skala P

In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 1 gilt nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Zu jeder Einstellung x für $0{,}1 < x < 1$ in C wird auf der Skala P der Wert $y = \sqrt{1 - x^2}$ abgelesen. Umgekehrt gilt auch $x = \sqrt{1 - y^2}$. Im Beispiel der Abb. 25 ist ersichtlich, daß 0,6 sowohl in Skala D als auch in Skala P eingestellt werden kann, das Ergebnis 0,8 steht immer in der entsprechenden Nachbarskala.

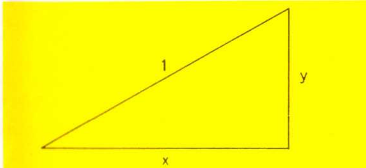


Abb. 24

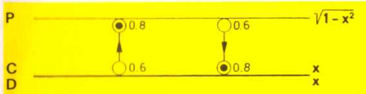


Abb. 25 $\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Man wählt jeweils die für die Genauigkeit günstigste Ableseart. Im Beispiel $\sqrt{1 - 0{,}15^2} = 0{,}9887$ wird 0,15 auf Skala C eingestellt. Die Beziehungen gelten nur für den in Skala P angegebenen Wertebereich. Wird noch die Skala DI hinzugezogen, ergeben sich die in Abb. 26 angegebenen Wechselbeziehungen.

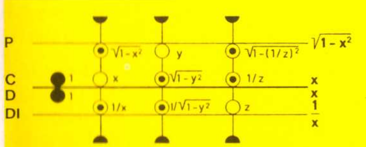


Abb. 26

Die Skala P vereinfacht im Zusammenspiel mit den Skalen C und S die Umrechnung sin ⟷ cos, weil im rechtwinkligen Dreieck die Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ gilt. Bei beliebigen rechtwinkligen Dreiecken ist die trigonometrische Lösung eleganter (s. Kap. 16).

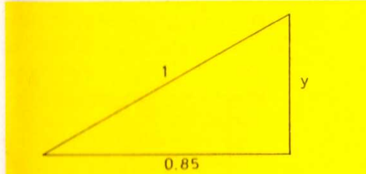


Abb. 27

Beispiel aus der Elektrotechnik:

Scheinlast $\triangleq 1{,}0$
Wirklast $\triangleq 0{,}85$
Blindlast $\triangleq \sqrt{1 - 0{,}85^2} = 0{,}527$

Zur genaueren Ausrechnung von Quadratwurzeln bildet man z. B.

$$\sqrt{0,91} = \sqrt{1 - 0,09} = 0,9540$$

0,09 wird im linken Teil der Skala B eingestellt, dann steht $\sqrt{0,09} = 0,3$ in C und der Wert $\sqrt{1 - 0,3^2} = 0,9540$ in P. Eine Genauigkeitssteigerung ist bis herab zu ca. $\sqrt{0,65}$ gewährleistet. Diese Rechnung ist immer dann zweckmäßig, wenn der Radikand nur wenig kleiner als 0,01; 1; 100 usw. ist.

13.2 Die Skalen H1 und H2

Die zweiteilige Skala H mit der Bezeichnung $\sqrt{1 + x^2}$ am rechten Skalenende hat wie die Skala P eine direkte Beziehung zur Grundskala D. Mit der Einstellung x in Skala D steht $y = \sqrt{1 + x^2}$ in Skala H und umgekehrt wird zu einer Einstellung y in Skala H der Ausdruck $x = \sqrt{y^2 - 1}$ in Skala D abgelesen. Für H1 gilt der Bereich 0,1 bis 1,0 in D, für H2 der Bereich 1 bis 10.

Die Verwandtschaft der Skalen H1 und H2 zur Skala P kommt darin zum Ausdruck, daß man mit ihnen Pythagorasrechnungen durchführen kann.

Mit der Skala H1 und H2: $c = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Mit der Skala P: $b = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}$

In Kap. 19.2 wird eine weitere Anwendung in Verbindung mit den Skalen Sh1 und Sh2 nach der Beziehung

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} \quad \text{und} \quad \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

verwendet. Es sei auch auf die Beziehung $\sec\alpha = \sqrt{1 + \tan^2\alpha}$ hingewiesen. Abgesehen von einer Vertauschung der Bezeichnungen stehen sich in den Skalen H und D die Koordinaten $y = \sqrt{x^2 - 1}$ und $x = \sqrt{1 + y^2}$ der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ gegenüber.

14. Die trigonometrischen Funktionen

Alle Winkelfunktionen sind auf die Grundskalen bezogen, und die Winkel sind in 360°-Teilung mit dezimaler Unterteilung angegeben.

Wird ein Winkel mit dem Läufer in der Skala S und T eingestellt, dann steht in Skala C der Wert der entsprechenden trigonometrischen Funktion. Umgekehrt kann zu einem in Skala C eingestellten Funktionswert der zugehörige Winkel in den Skalen S und T abgelesen werden.

Die Winkelbezifferung der dezimal unterteilten Skalen S und T gilt nur für die angeschriebenen Gradwerte.

Der Rechenstab gibt nur die Funktionswerte für Winkel im ersten Quadranten. Zur Reduktion beliebiger Winkel auf den ersten Quadranten sind die Beziehungen der Winkelfunktionen in einer Tabelle zusammengestellt.

	$\pm\alpha$	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$
sin	$\pm \sin\alpha$	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$
cos	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
tan	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$
cot	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$

14.1 Die Sinusskala S

Die Skala S ist für Sinuswerte von 5,5° bis 90° und rücklaufend für Kosinuswerte von 0° bis 84,5° rot beziffert. Alle auf der Skala C abgelesenen Sinus- oder Kosinuswerte beginnen mit 0, . . .

Die Sinuswerte der Winkel $\alpha > 45°$ sind nach der Beziehung $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ in der rot bezifferten Skala P genauer abzulesen; zum Einstellen des Winkels werden die roten Ziffern der Skala S benutzt. Farbregel für Sinusfunktionen: Stets gleichfarbig bezifferte Skalen einstellen und ablesen.

Wegen $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ gelten für die Kosinuswerte der Winkel $\alpha < 45°$ analoge Verhältnisse mit der Farbregel: Zu jeder Einstellung in Skala S gehört die andersfarbig bezifferte Ablesung in Skala C oder P.

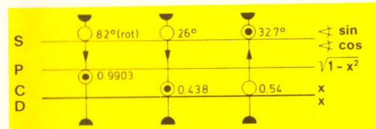


Abb. 28 Sinus

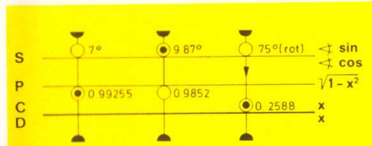


Abb. 29 Kosinus

Beispiele:

$\sin 26° = 0,438$

$\sin 82° = \sqrt{1 - \cos^2 82°} = 0,9903$

$\text{arc}\sin 0,54 = 32,7°$

$\cos 75° = 0,2588$

$\cos 7° = \sqrt{1 - \sin^2 7°} = 0,99255$

$\text{arc}\cos 0,9852 = 9,87°$

14.2 Die Tangensskala T

Die Tangensskala ist von 5,5° bis 45° in schwarzer Farbe und rückläufig von 45° bis 84,5° in roter Farbe beziffert. Zu schwarzen Winkelwerten wird die Tangensfunktion auf Skala C abgelesen, ihre Werte beginnen mit 0, . . .

Da $\tan\alpha = 1/\tan(90° - \alpha)$ ist, kann die Tangensfunktion für rote Winkelwerte $\alpha > 45°$ entweder in Skala CI oder — bei Grundstellung der Zunge — auch in DI abgelesen werden. Die Kehrwertskala reicht dann von $\tan 45° = 1$ bis $\tan 84,29° = 10$.

Beispiele:

tan 14°	= 0,249	(Abb. 30)
tan 23,6°	= 0,437	
tan 41,1°	= 0,872	
tan 51,2°	= 1,244	
tan 73,4°	= 3,35	
tan 81,4°	= 6,61	(Abb. 30 u. 31)
arc tan 1,75	= 60,25°	
arc tan 2,0	= 63,43°	
cot 9°	= 6,31	
cot 14°	= 4,01	
cot 23,6°	= 2,289	
cot 41,1°	= 1,146	
cot 51,2°	= 0,804	
cot 68,25°	= 0,399	(Abb. 30)
cot 77°	= 0,2309	
arc cot 2,0	= 26,57°	
arc cot 1,75	= 29,74°	

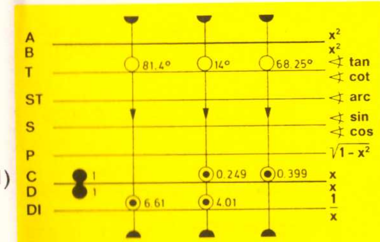


Abb. 30 Tangens und Kotangens

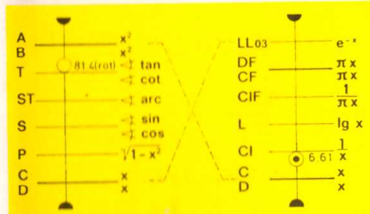


Abb. 31 Ablesung tan 81,4° auf Skala CI

Die Kotangenswerte werden nach der Formel $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ als Kehrwerte der Tangenswerte abgelesen. Somit findet man die Kotangenswerte für Winkel $< 45°$ auf Skala CI bzw. DI und für Winkel $> 45°$ auf Skala C.

Beachte: Gleiche Farben der Bezifferung für Einstellung und Ablesung geben den Tangens, ungleiche Farben den Kotangens des eingestellten Winkels.

15. Die Skala ST

Diese Skala ist eine Fortsetzung der Skalen S und T für Winkel, deren Funktionswerte zwischen 0,01 und 0,1 auf Skala C abgelesen werden. Sie erfüllt aber gleichzeitig die wichtige Aufgabe der Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß beim Übergang zur Skala C.

Wenn $\sin\alpha$ und $\tan\alpha$ für $\alpha < 5{,}5°$ sowie $\cos\alpha$ und $\cot\alpha$ für $\alpha > 84{,}5°$ bestimmt werden sollen, gilt die Näherung

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \cos(90° - \alpha) \approx \cot(90° - \alpha) \approx \frac{\pi}{180°}\,\alpha = 0{,}01745\,\alpha.$$

Die Skala ST ist von 0,55° bis 6° beziffert, aber im Bogenmaß unterteilt. Dies ermöglicht das Ablesen der genauen Bogenwerte der Winkel auf der Grundskala C als auch der Näherungen der Sinus- und Tangenswerte kleiner Winkel. Die rückläufige rote Bezifferung der ST-Skala von 84° bis 89,45° gilt für die entsprechenden Kosinus- und Kotangenswerte.

Die Übereinstimmung zwischen $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ und $\operatorname{arc}\alpha$ ist bis 4° sehr gut; z. B. $\sin 4° = 0{,}0698$, $\tan 4° = 0{,}0699$ und $\operatorname{arc} 4° = 0{,}0698$. Bei größeren Winkeln zwischen 4° und 6° rechnet man genauer

$$\sin\alpha \approx \alpha \cdot \frac{\sin 6°}{6°} \qquad \text{bzw.} \qquad \tan\alpha \approx \alpha \cdot \frac{\tan 6°}{6°}$$

$$\sin\alpha \approx \operatorname{arc}(\alpha)\,\frac{\sin 6°}{\operatorname{arc} 6°}$$

15.1 Kleine Winkel — Große Winkel

Einige Beispiele dieser Näherungsrechnung dienen zur Übung in der Anwendung der Funktionsskalen:

$$\sin 4{,}7° = 4{,}7° \cdot \frac{\sin 6°}{6°} = 0{,}0819 \qquad \tan 4{,}7° = 4{,}7° \cdot \frac{\tan 6°}{6°} = 0{,}0822$$

$$\sin 5{,}3° = 5{,}3° \cdot \frac{\sin 6°}{6°} = 0{,}0924 \qquad \tan 5{,}3° = 5{,}3° \cdot \frac{\tan 6°}{6°} = 0{,}0928$$

Die Werte $\cos\alpha$ für $\alpha < 5{,}7°$ und $\sin\alpha$ für $\alpha > 84{,}3°$ können nur ungenau vom Rechenstab abgelesen werden. Hier hilft als Näherung der Anfang einer Reihenentwicklung: $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ (α in rad)

Beispiele: $\cos 1{,}5° = 1 - \frac{0{,}0262^2}{2}$

$= 1 - \frac{0{,}000686}{2}$

$= 1 - 0{,}000343 = 0{,}999657$

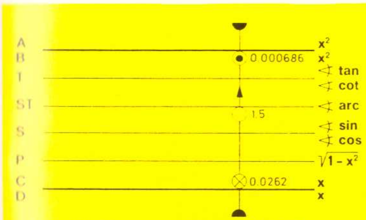


Abb. 32 $\cos 1{,}5° = 0{,}999657$

Zum Berechnen des zweiten Gliedes der Reihenentwicklung wird der Winkel 1,5° in Skala ST mit dem Läufer eingestellt. In Skala C steht der Winkelwert im Bogenmaß und in Skala B sein Quadrat 0,000686. Die Division durch 2 erfolgt im Kopf. Abschließend wird dann die Subtraktion vorgenommen.

$$\sin 86{,}5° = \cos 3{,}5° = 1 - \frac{0{,}0611^2}{2} = 0{,}99813$$

15.2 Umrechnung Gradmaß ⟷ Bogenmaß

Die Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß erfolgt nach der Beziehung

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{180°}{\pi} = \frac{360°}{2\pi}$$

mit einer Läufereinstellung, weil die Skala ST eine um $\frac{180}{\pi}$ versetzte Grundskala ist. Zu jedem Winkel in Skala ST wird der Bogen in Skala C abgelesen, mit 0,0... beginnend. Gegenüber 1° in Skala ST steht $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745$ in C.

In der umgekehrten Richtung wird zu jedem Bogen der Winkel abgelesen. Diese Rechnung gilt nicht nur für die auf der Skala ST angegebenen Winkel, sondern aufgrund der dezimalen Gradeinteilung gleichzeitig für alle Winkel, denn die 1 kann auch als 0,1°, 10° usw. gelesen werden, und dementsprechend verschiebt sich nur die Kommastelle im Bogenmaß (Abb. 33).

z. B. a) 0,1° = 0,001 745 rad

b) 10° = 0,174 5 rad

c) 5° = 0,087 25 rad

d) 50° = 0,872 5 rad

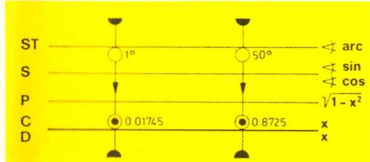


Abb. 33

Sind die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden angegeben, werden diese in Dezimalwerte eines Grades umgewandelt: $1' = 1/60°$ und $1'' = 1/3600°$ (s. auch Ziff. 15.3 und 24.1).

Durch Gegenüberstellung der 6 oder 36 in Skala DF und 1° in Skala ST erhält man vorteilhafte Tabellenstellungen für derartige Umrechnungen.

15.3 Die Marken ϱ' und ϱ''

Die Marken ϱ' und ϱ'' in der Zungenskala C vereinfachen die Umrechnung ins Bogenmaß, wenn die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden gegeben sind.

Ihre Bedeutung ist:

$$\varrho' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \qquad \text{für Minuten}$$

$$\varrho'' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206265 \text{ für Sekunden}$$

Damit genügt eine Division zur Umrechnung Winkelmaß ←→ Bogenmaß:

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

Beispiele:

$$\text{arc } 22' = \frac{22'}{\varrho'} = 0{,}00640 \quad \text{rad}$$

$$\text{arc } 400' = \frac{400'}{\varrho'} = 0{,}1163 \quad \text{rad}$$

$$\text{arc } 17'' = \frac{17''}{\varrho''} = 0{,}0000824 \text{ rad}$$

$$\text{arc } 380'' = \frac{380''}{\varrho''} = 0{,}001843 \quad \text{rad}$$

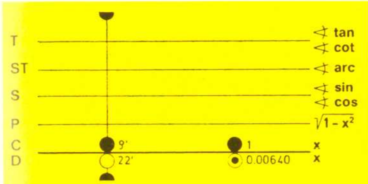


Abb. 34 arc 22' = 0,00640 rad

Bei Benutzung dieser ϱ-Marken wird das Rechnen mit kleinen Winkeln oder Bögen für beliebige Radien sehr bequem.

$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \varrho$, wenn der Winkel gesucht ist,

$b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho}$ wenn die Bogenlänge gesucht ist.

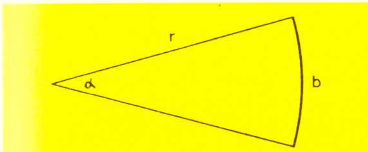


Abb. 35

Beispiele

$$\alpha = \frac{0{,}6}{45} \cdot \varrho' = 45{,}8'$$

$$b = \frac{48'' \cdot 67}{\varrho''} = 0{,}0156$$

16. Die trigonometrische Berechnung ebener Dreiecke

Der Vorteil der trigonometrischen Skalen liegt nicht allein im Ablesen der trigonometrischen Funktionen. Wichtiger ist, daß mit ihnen gerechnet werden kann, ohne die Funktionswerte ablesen zu müssen.

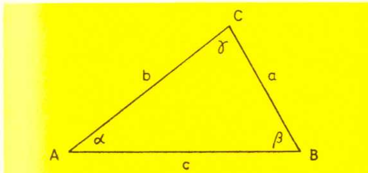


Abb. 36

Der Sinussatz ist ein Musterbeispiel für eine Anwendung der Proportionsrechnung auf dem Rechenstab:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Mit der Einstellung eines dieser Verhältnisse durch Gegenüberstellung der Strecke auf Skala C und des gegenüberliegenden Winkels auf Skala S bzw. ST sind auch die übrigen Verhältnisse eingestellt, so daß zu jeder Seite der zugehörige Winkel und umgekehrt zu jedem Winkel die gegenüberliegende Seite abgelesen werden kann.

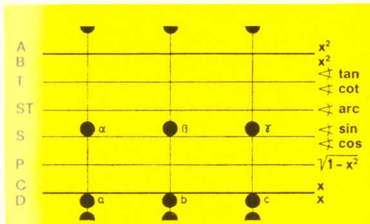


Abb. 37

Am häufigsten kommt in der Praxis die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke vor. In diesem Sonderfall ist $\gamma = 90°$ und damit $\sin\gamma = 1$, sowie $\alpha = 90° - \beta$ und $\beta = 90° - \alpha$. Der Sinussatz erhält dann die Form:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Ferner ist: $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

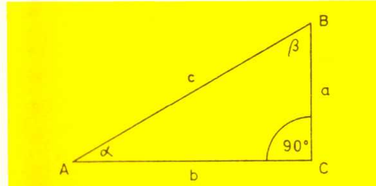


Abb. 38

Je nach den gegebenen Stücken kommen zwei grundsätzliche Rechenoperationen vor:

1. Gegeben sind zwei beliebige Stücke (außer Fall 2).
2. Gegeben sind die Katheten a und b.

Beispiel zu 1:

Gegeben: c = 5, b = 4 Gesucht: a, α, β

Zuerst wird die 1 der Skala C ($\sin 90° = 1$) über den Hypotenusenwert 5 auf Skala D gestellt. Dann können die gesuchten Größen a, α, β allein durch ein Verstellen des Läufers abgelesen werden.

$$\frac{5}{1} = \frac{4}{\sin 53{,}15°} = \frac{3}{\cos 53{,}15°}$$

$\beta = 53{,}15°$

$\alpha = 90° - 53{,}15° = 36{,}85°$

$a = 3$

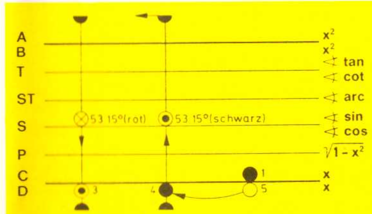


Abb. 39 Die Hypotenuse ist gegeben

Über der Kathete 4 auf Skala D steht $\beta = 53{,}15°$ auf Skala S (schwarze Bezifferung). Es bleibt sich gleich, ob man als nächsten Schritt $90° - 53{,}15° = 36{,}85°$ mit schwarzer Bezifferung (sin) oder gleich 53,15° mit roter Bezifferung (cos) einstellt, um darunter die Kathete 3 auf Skala D abzulesen.

Wenn eine Kathete und ein Winkel gegeben sind, beginnt die Rechnung mit der Gegenüberstellung der Kathete und ihres gegenüberliegenden Winkels, die weitere Rechnung ist dann analog der Abb. 39, und die Hypotenuse wird unter der Zungeneins auf Skala D abgelesen.

Mitunter ist es günstiger, anstelle der Skala D die Skala DF zu benutzen, um das Durchschieben der Zunge einzusparen, dann aber erscheinen auch alle weiteren Seiten auf Skala DF, an der Methode ändert sich nichts.

Beispiel zu 2:

Gegeben: a = 3, b = 4 Gesucht: c, α, β

Zunächst wird α aus den Katheten berechnet:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

oder besser in der Proportionsform:

$$\frac{4}{1} = \frac{3}{\tan\alpha}$$

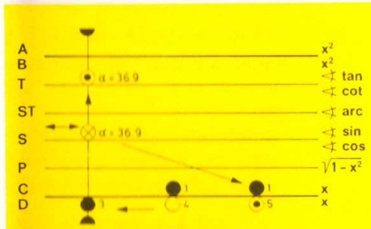


Abb. 40 Die Katheten sind gegeben

Nach dem Einstellen der Zungeneins über den Wert 4 auf Skala D wird der Läuferstrich über die 3 auf Skala D gebracht und darüber auf Skala T der Winkel $\alpha = 36{,}9°$ abgelesen. Im zweiten Teil der Lösung rechnet man nach dem Sinussatz $\frac{1}{c} = \frac{3}{\sin 36{,}9°}$. Da der Läufer noch auf dem Wert 3 steht, wird jetzt die Zunge so verschoben, daß der Winkel 36,9° der Skala S unter dem Läuferstrich steht, dann kann $c = 5$ unter der Zungeneins auf Skala D abgelesen werden.

Für $\alpha > 45°$, wenn $a > b$, wird die Berechnung genauso durchgeführt. Die Rechnung beginnt stets mit der größeren Kathete, nur wird dann der Komplementwinkel (rote Bezifferung) auf Skala T abgelesen, und entsprechend muß auch der Kosinus (rote Bezifferung) auf der Skala S eingestellt werden.

Die Rechnungsart wird übersichtlicher, wenn man das Dreieck zeichnet (Skizze); man vermeidet dadurch Fehler. Man kann sich auch angewöhnen, nur mit dem Winkel $< 45°$ zu rechnen und gegebenenfalls die Ergänzung zu 90° zu bilden.

Diese zwei angeführten Rechnungsarten für das rechtwinklige Dreieck haben besondere Bedeutung bei Koordinaten- und Vektorrechnungen sowie bei Rechnungen mit komplexen Zahlen. Es handelt sich bei derartigen Aufgaben stets um die Verwandlung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten oder um die Umkehrung dieser Aufgabe.

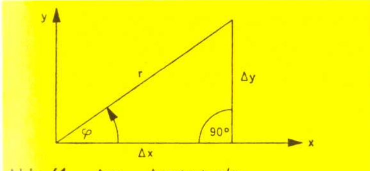


Abb. 41 $\Delta x, \quad \Delta y \longleftrightarrow r\underline{/\varphi}$

16.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen lassen sich in der Komponentenform $Z = a + ib$ leicht addieren oder subtrahieren, in der Vektorform $Z = r \cdot e^{i\varphi} = r\underline{/\varphi}$ dagegen multiplizieren, dividieren und potenzieren. Aus diesem Grunde muß die Umrechnung von der einen Form in die andere häufig durchgeführt werden.

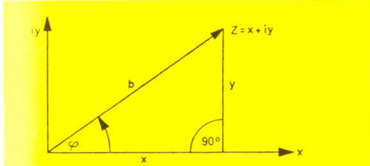


Abb. 42 $Z = x + iy = r\underline{/\varphi}$

Beispiele: $Z = 4{,}5 + i\,1{,}3 = 4{,}68\underline{/16{,}13°}$
$Z = 6{,}7\underline{/49°} = 4{,}39 + i\,5{,}05$

Der Rechengang ergibt sich aus den vorstehenden Erläuterungen über das rechtwinklige Dreieck und aus Abb. 42.

17. Die Exponentialskalen

Die Exponentialskalen sind doppeltlogarithmisch geteilt und auf die Grundskalen C und D bezogen. Beim ARISTO-HyperLog ist der Bereich von 10^{-5} bis 10^{+5} in acht Skalen unterteilt, in vier e^{-x}-Skalen LL00, LL01, LL02, LL03 von 10^{-5} bis 0,999 und vier e^{x}-Skalen LL0, LL1, LL2, LL3 von 1,001 bis 10^5.

Die Ablesungen auf den Exponentialskalen sind eindeutig, d. h. der Wert 1,35 bedeutet nur 1,35 nicht aber auch 13,5 oder 135 wie beim Rechnen mit den Grundskalen.

Die Exponentialskalen LL und LL0 sind zueinander reziprok. Mit ihnen können die Kehrwerte von Zahlen $< 2{,}5$ mit größerer Genauigkeit ermittelt werden, als bei der Verwendung der Skalen CI oder CIF.

Beispiel: $\frac{1}{1{,}0170} = 0{,}98328$

Mit den Exponentialskalen werden Aufgaben der Potenzbildung und des Wurzelziehens auf eine Addition bzw. Subtraktion von Strecken zurückgeführt. Damit können innerhalb des Bereichs beliebige Potenzen, Wurzeln und Logarithmen berechnet werden.

17.1 Potenzen und Wurzeln mit den Exponenten 10 und 100

Die Exponentialskalen sind so angeordnet, daß jeweils beim Übergang von einer LL-Skala zur benachbarten Skala die 10. Potenz oder 10. Wurzel berechnet wird, je nachdem, in welcher Richtung abgelesen wird. Die sich daraus ergebenden Beziehungen zeigen die Beispiele der Abb. 43 für die Einstellung des Läuferstriches auf den Wert 1,015 in Skala LL1.

Beispiele:	Ablesung auf Skala
$1{,}015^{0,1} = \sqrt[10]{1{,}015} = 1{,}00149$	LL0
$1{,}015^{1} = 1{,}015$	LL1
$1{,}015^{10} = 1{,}1605$	LL2
$1{,}015^{100} = 4{,}43$	LL3
$\frac{1}{1{,}015^{100}} = 1{,}015^{-100} = 0{,}2257$	LL03
$\frac{1}{1{,}015^{10}} = 1{,}015^{-10} = 0{,}8617$	LL02
$\frac{1}{1{,}015^{1}} = 1{,}015^{-1} = 0{,}98522$	LL01
$\frac{1}{1{,}015^{0,1}} = \frac{1}{\sqrt[10]{1{,}015}} = 0{,}99851$	LL00

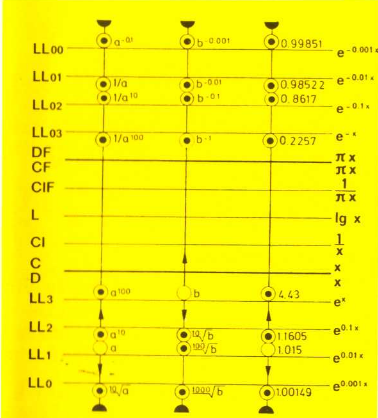


Abb. 43 Zusammenhang der LL-Skalen

Variationen der Ablesungen in der gleichen Zahlenreihe der Abb. 43:

$\sqrt[10]{4{,}43} = 1{,}1605 \quad \sqrt[100]{0{,}2257} = 0{,}98522 \quad 0{,}98522^{10} = 0{,}8617 \quad 1{,}00149^{1000} = 4{,}43$

Diese in der Praxis selten vorkommenden Beispiele dienen dem besseren Verständnis für den Aufbau der Exponentialskalen.

17.2 Potenzen $y = a^x$

Genau so, wie man mit den Grundskalen multipliziert, wird bei der Anwendung der LL-Skalen potenziert.

Rechengang:

a) Einstellen des Anfanges oder Endes der Skala C über den Basiswert a auf der entsprechenden LL-Skala mit Hilfe des Läufers, z. B.: $a = 3{,}2$ in Skala LL3.
b) Einstellen des Exponenten x auf der Skala C durch Verschieben des Läufers.
c) Ablesen des Potenzwertes y unter dem Läuferstrich auf der entsprechenden LL-Skala (vgl. Ableseregeln!) in Abhängigkeit vom Exponenten.

Mit der Einstellung des Basiswertes erhält man eine Tabellenstellung für die Funktion $y = a^x$. Abb. 44 zeigt die Einstellung für die Funktion $y = 3{,}2^x$, wobei der Läufer über dem Exponenten 2,5 und seinen dezimalen Variationen steht.

Beispiele:		Ablesung auf Skala
$3{,}2^{2,5}$	$= 18{,}3$	LL3
$3{,}2^{0,25}$	$= 1{,}338$	LL2
$3{,}2^{0,025}$	$= 1{,}02956$	LL1
$3{,}2^{0,0025}$	$= 1{,}002912$	LL0
$3{,}2^{-2,5}$	$= 0{,}0546$	LL03
$3{,}2^{-0,25}$	$= 0{,}7476$	LL02
$3{,}2^{-0,025}$	$= 0{,}97134$	LL01
$3{,}2^{-0,0025}$	$= 0{,}997096$	LL00

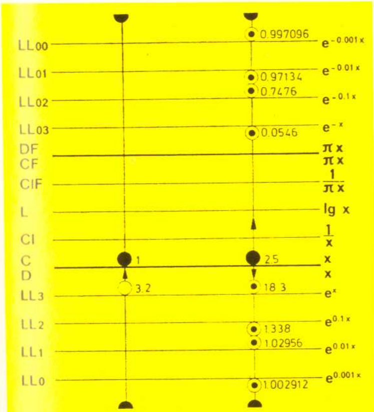


Abb. 44 Potenzen

Ableseregeln für $y = a^x$

a) Bei positiven Exponenten liegen Einstellung und Ergebnis in der gleichen Skalengruppe LL0 — LL3 oder LL00 — LL03, man bleibt also bei der gleichen Farbe der Bezifferung. Bei negativen Exponenten muß man von einer Skalengruppe zur anderen wechseln (Farbenwechsel).

b) Analog zur Beschriftung der Skalen am rechten Rechenstabende erfolgt die Ablesung auf der niedriger bezifferten Nachbarskala LL, wenn bei der Variation der Exponenten das Komma um eine Stelle nach links rückt (vgl. Beispiel von Abb. 44).

c) Wird die Basis mit dem rechten Zungenende eingestellt, werden alle Ablesungen auf der höher bezifferten Nachbarskala vorgenommen (Abb. 46).

Für $0 < a < 1$ findet man die Potenzen mit positiven Exponenten in der Skalengruppe LL00 — LL03 und mit negativen Exponenten in der Skalengruppe LL0 — LL3.

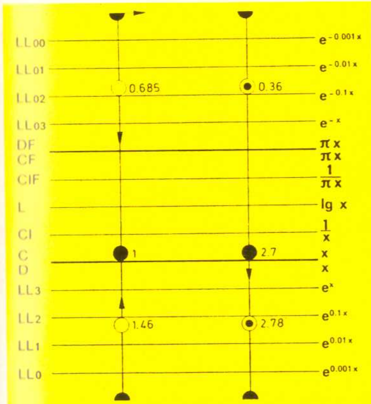


Abb. 45 Anfang von C über der Basis

Beispiele:

$0{,}685^{2,7} = 0{,}36$ (Abb. 45)

$0{,}685^{-2,7} = 2{,}78$

$1{,}46^{2,7} = 2{,}78$

$1{,}46^{-2,7} = 0{,}36$

Abb. 46 zeigt die gleichen Beispiele wie Abb. 45, aber mit Einstellung des rechten Zungenendes, deshalb stehen die Ergebnisse nicht in der Skala, in der die Basis eingestellt wird, sondern in der Nachbarskala LL3 bzw. LL03.

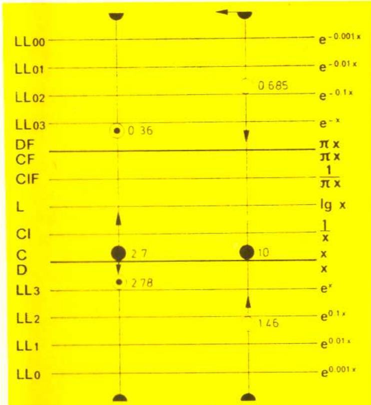


Abb. 46 Ende von C über der Basis

Liegt der Basiswert, wie in diesem Falle, im Mittelfeld der Skala, ist es manchmal vorteilhafter, mit der Skala CF zu rechnen. Dann steht fast die ganze Skala CF für die Einstellung der Exponenten zur Verfügung und das Durchschieben wird bei der Tabellenbildung erspart.

Das Potenzieren mit den Exponentialskalen wird sehr übersichtlich, wenn man von Werten ausgeht, die sich überschläglich leicht berechnen lassen und wenn man die verschiedenen LL-Skalen als Teile einer durchgehenden Exponentialskala erkennt, die nur im Bereich von 0,999 bis 1,001 eine Lücke hat. Diese Lücke wird durch Näherungsrechnungen ausgefüllt (s. Kap. 17.3.2 und 17.3.3).

17.3 Sonderfälle von $y = a^x$

Die Möglichkeiten, den Exponenten und die Basis zu variieren, sind durch den Bereich der Exponentialskalen begrenzt.

17.3.1 $y > 10^5$ und $y < 10^{-5}$

Reicht das Ergebnis einer Potenz über den Bereich der Exponentialskalen hinaus, muß der Exponent in Summanden und somit die Potenz in Faktoren zerlegt werden.

Beispiel:

$3{,}14^{19} = 3{,}14^{6+6+7} = (3{,}14^6)^2 \cdot 3{,}14^7 = 0{,}955^2 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^3 = 2{,}76 \cdot 10^9$

Für negative Exponenten gilt selbstverständlich der gleiche Lösungsweg.

17.3.2 $0{,}999 < y < 1{,}001$

Ist infolge eines kleinen Exponenten der Wert einer Potenz kleiner als 1,001, aber größer als 0,999, so kann das Ergebnis nicht der LL-Skala entnommen werden.

Die Reihenentwicklung

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \ldots$$

gibt für diese Fälle eine Näherungslösung:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a \quad \text{für } |x \cdot \ln a| \ll 1$$

Wenn die 1 der Skala C mit Hilfe des Läufers über die Basis a in Skala LL gestellt wird, steht sie auch über dem Wert ln a in Skala D (vgl. Ziff. 17.6.3), und eine Multiplikation mit x durch Verschieben des Läufers über Skala C ergibt in Skala D die Ablesung $x \cdot \ln a$. Wird dieser Zwischenwert zu 1 addiert oder von 1 subtrahiert, erhält man den gesuchten Potenzwert $a^{\pm x}$. Je kleiner der Exponent ist, um so genauer wird das Ergebnis dieser Rechenmethode.

Das Beispiel der Abb. 44 kann damit weiter fortgesetzt werden. So ist z. B.

$$3{,}2^{0{,}00025} = 1 + 0{,}0002908 = 1{,}0002908$$
$$3{,}2^{-0{,}00025} = 1 - 0{,}0002908 = 0{,}9997092$$

Bei weiteren dezimalen Variationen des Exponenten ändert sich nur noch die Anzahl der Nullen oder Neunen hinter dem Komma, z. B.: $3{,}2^{0{,}000025} = 1{,}00002908$.

17.3.3 $0{,}999 < a < 1{,}001$

Wenn in der Potenz $y = a^x$ die Basis größer als 0,999, aber kleiner als 1,001 ist, hilft wieder eine Näherungslösung.

Nach der vorherigen Reihenentwicklung gilt $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$. Da a nahezu 1 ist, kann man schreiben: $a = 1 \pm n$. Damit gilt:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln (1 \pm n)$$

Da $\ln (1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \cdots \approx \pm n$ (für $|n| \ll 1$), gilt:

$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm nx \text{ und } (1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp nx \text{ (für } |nx| \ll 1)$$

Wenn der Bereich der LL-Skalen für die Einstellung der Basis a nicht ausreicht, wird Skala D wie eine LL-Skala benutzt, aber mit dem Unterschied, daß anstelle von $a = 1 \pm n$ der Wert $|n|$ eingestellt wird.

Wird die 1 der Skala C über n in Skala D gestellt, ist diese Einstellung praktisch identisch mit der Einstellung $1 \pm n$ in einer Exponentialskala, die man sich als Fortsetzung für den Bereich von 1,0001 bis 1,001 bzw. 0,999 bis 0,9999 usw. vorstellen kann. Mit kleiner werdendem n wird die Näherung $\ln (1 \pm n) = \pm n$ immer genauer.

Die Potenz wird wie üblich gebildet, ist aber jetzt eine einfache Multiplikation $n \cdot x$. Das der Skala D entnommene Ergebnis muß durch Addition der 1 bzw. Subtraktion von 1 vervollständigt werden. Kommt man mit größeren Exponenten in den Bereich der vorhandenen LL-Skalen, kann das Ergebnis direkt in der entsprechenden Exponentialskala abgelesen werden.

Beispiele:

$1{,}00023^{3,7} = (1 + 0{,}00023)^{3,7} = 1{,}000851$	Ablesung auf Skala D zu 1 addieren
$1{,}00023^{37} = 1{,}00854$	Ablesung auf Skala LL0
$0{,}99977^{3,7} = (1 - 0{,}00023)^{3,7} = 0{,}999149$	Ablesung auf Skala D von 1 subtrahieren
$0{,}99977^{37} = 0{,}99152$	Ablesung auf Skala LL00

17.4 Potenzen $y = e^x$

$y = e^x$ ergibt sich als Spezialfall aus der Grundstellung der Zunge, denn dann ist die Zahl $e = 2{,}718$ als Basis eingestellt. Da die Skala D diese Einstellung zu den Exponentialskalen ständig hat, genügt es, den Exponenten mit dem Läufer auf Skala D einzustellen, um die Potenz der Basis e in der LL-Skala ablesen zu können. Wird der Läufer auf 1,489 in Skala D gestellt, sind die folgenden Werte ablesbar.

$e^{1,489} = 4{,}43$	$e^{-1,489} = 0{,}2260$
$e^{0,1489} = 1{,}1605$	$e^{-0,1489} = 0{,}8618$
$e^{0,01489} = 1{,}015$	$e^{-0,01489} = 0{,}98523$
$e^{0,001489} = 1{,}001\,489$	$e^{-0,001489} = 0{,}998513$

Bei weiteren Variationen wird wieder die Übereinstimmung mit $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ erreicht. $e^{0,0001489} = 1{,}0001489$

17.5 Wurzeln $a = \sqrt[x]{y}$

Mit den Exponentialskalen lassen sich Wurzeln mit beliebigen Radikanden ziehen. Das Radizieren, die Umkehrung des Potenzierens, gleicht dem Rechengang einer Division mit den LL-Skalen und der Grundskala C. Wird die Potenz $3{,}2^{2,5} = 18{,}3$ gemäß Abschnitt 17.2 eingestellt, so kann in der umgekehrten Richtung $\sqrt[2,5]{18{,}3} = 3{,}2$ abgelesen werden.

Rechengang:

a) Gegenüberstellung des Radikanden y auf der LL-Skala und des Wurzelexponenten x auf Skala C.

b) Ablesung des Wurzelwertes a unter dem Zungenanfang oder -ende auf der entsprechenden LL-Skala.

Die Ableseregeln von Kap. 17.2 finden auch hier eine sinngemäße Anwendung. Es ist dabei zu beachten, daß die Ablesung unter dem rechten Zungenende auf der benachbarten, kleiner bezifferten Exponentialskala LL0—LL3 oder LL00—LL03 erfolgen muß.

$$\sqrt[0,77]{21} = 52{,}1 \qquad \frac{1}{\sqrt[0,77]{21}} = 0{,}0192$$

$$\sqrt[7,7]{21} = 1{,}485 \qquad \frac{1}{\sqrt[7,7]{21}} = 0{,}6734$$

$$\sqrt[77]{21} = 1{,}0403 \qquad \frac{1}{\sqrt[77]{21}} = 0{,}96122$$

$$\sqrt[770]{21} = 1{,}00396 \qquad \frac{1}{\sqrt[770]{21}} = 0{,}99605$$

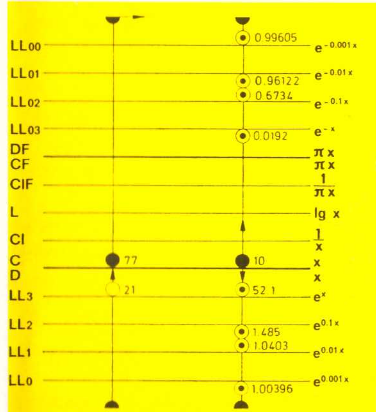


Abb. 47 Wurzeln

Wurzelausdrücke können zum besseren Verständnis in Potenzen verwandelt werden. Die Exponenten werden dann in Skala CI eingestellt, oder wenn e die Basis ist, in Skala DI.

Im folgenden Beispiel den Läufer auf 3,5 in DI einstellen und in LL2 bzw. LL02 ablesen.

$$\sqrt[3,5]{e} = e^{+\frac{1}{3,5}} = 1{,}3307 \text{ in LL2} \qquad \frac{1}{\sqrt[3,5]{e}} = e^{-\frac{1}{3,5}} = 0{,}7514 \text{ in LL02}$$

17.6 Logarithmen

17.6.1 Logarithmen beliebiger Basis

Mit den Exponentialskalen können beliebige Logarithmen ermittelt werden. Die Logarithmen ergeben sich aus der Umkehrung der Potenzbildung. Den Lösungsweg erkennt man am besten aus einer Gegenüberstellung mit der Potenzaufgabe und ihrer Umkehrung.

$y = a^x \qquad x = \log_a y$ (lies: Logarithmus y zur Basis a)

Die Bestimmung des Logarithmus ist identisch mit der Lösung einer Potenzaufgabe, bei welcher der Exponent gesucht wird.

Rechengang:

a) Einstellung des Läufers auf den Basiswert a in Skala LL.

b) Zungenanfang oder -ende unter den Läuferstrich stellen.

c) Einstellung des Numerus y auf der LL-Skala mit dem Läuferstrich.

d) Ablesung des Logarithmus unter dem Läuferstrich in Skala C.

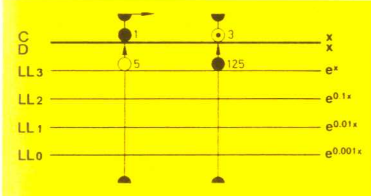


Abb. 48 $\log_5 125 = 3{,}0$

Die Stellung des Kommas erhält man aus der Beziehung: $\log_a a = 1$
Stellt man den Zungenanfang über die Basis a, dann sind die Logarithmen rechts vom Wert a größer als 1 und links davon kleiner als 1.

Ableseregel:

a) Jeder Übergang zur benachbarten LL-Skala — in der Reihenfolge LL3, LL2, LL1, LL0 oder LL03, LL02, LL01, LL00 — bewirkt für den Logarithmus eine Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach links, in der umgekehrten Reihenfolge nach rechts.

b) Die Logarithmen werden positiv (negativ), wenn der Numerus und die Basis auf gleichfarbigen (ungleichfarbigen) LL-Skalen eingestellt werden.

Übungsbeispiele:

$\log_2 16 = 4{,}0$
$\log_2 1{,}02 = 0{,}02857$
$\log_2 0{,}25 = -2$

17.6.2 Die dekadischen Logarithmen

Wird die 1 der Skala C über die Basis 10 in Skala LL3 gestellt, kann zu jedem in der LL-Skala eingestellten Numerus der dekadische Logarithmus in Skala C abgelesen werden (Abb. 49 und 50).

Für die oft benötigten dekadischen Logarithmen befindet sich zusätzlich auf der Zunge eine Skala L, die nur die Mantissen angibt, wenn der Numerus in Skala C eingestellt wird. Wie bei der Benutzung einer Logarithmentafel wird die Kennziffer des Logarithmus nach der Regel „Stellenzahl minus 1" gebildet und zur Mantisse addiert. Über jedem Wert der Skala C steht somit sein Logarithmus, und umgekehrt kann zu jedem Logarithmus der Numerus direkt abgelesen werden.

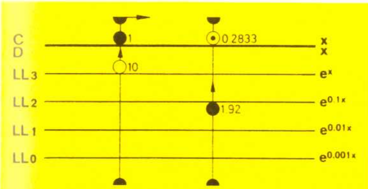


Abb. 49 $\lg 1{,}92 = 0{,}2833$

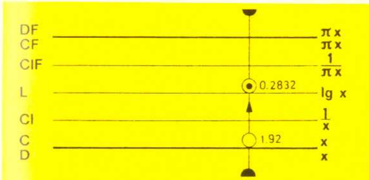


Abb. 50 $\lg 1{,}92 = 0{,}283$ mit L/C

Zur Benutzung der Skala L wird nur der Läufer verschoben, damit werden die dekadischen Logarithmen mit dieser Skala einfacher als mit den LL-Skalen gefunden. Dagegen werden die Ergebnisse für den Bereich der Skala LL1 genauer abgelesen.

Beispiel:

$\lg 1{,}03 = 0.01283$ mit der Skala LL1
$\lg 1{,}03 = 0.013$ mit der Skala L

Übungsbeispiele:

$\log_{10} 50 = 1{,}699$
$\log_{10} 2 = 0{,}301$
$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}01283$
$\log_{10} 0{,}015 = -1{,}824$
$\log_{10} 0{,}5 = -0{,}3010$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$
$\log_{10} 6 = 0{,}778$
$\log_{10} 1{,}14 = 0{,}0569$
$\log_{10} 1{,}015 = 0{,}00647$

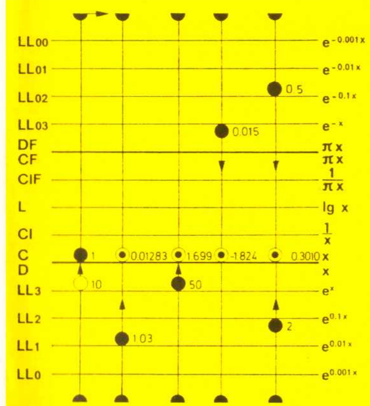


Abb. 51 Dekadische Logarithmen

Beim Einstellen mit dem Endstrich der Skala C liegen die Ablesungen alle links vom Basiswert, sie sind also < 1, z. B. $\log_{10} 9 = 0{,}954$. Die Logarithmen von Zahlen < 1 sind negativ.

17.6.3 Die natürlichen Logarithmen

Die natürlichen Logarithmen der Basis „e" werden einfach durch den Übergang von den Exponentialskalen zur Grundskala D gefunden (Abb. 52).

Übungsbeispiele:

$\ln 4{,}375 = 1{,}475$
$\ln 0{,}622 = -0{,}475$
$\ln 0{,}05 = -2{,}994$

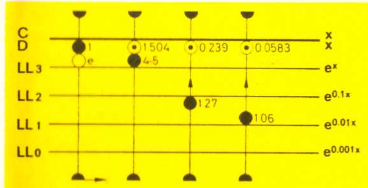


Abb. 52 $\ln 4{,}5 = 1{,}504$
$\ln 1{,}27 = 0{,}239$
$\ln 1{,}06 = 0{,}0583$

18. Weitere Anwendungen der Exponentialskalen

Bisher wurde nur die Zungenskala C in Verbindung mit den Exponentialskalen benutzt, um die wesentlichen Zusammenhänge beim Rechnen zu zeigen. Selbstverständlich können auch andere Zungenskalen zur Anwendung kommen, deren funktionaler Zusammenhang mit der Skala C in den früheren Kapiteln erläutert worden ist; z. B. kann mit Skala B eine Potenz $a^{1/x}$ eingestellt werden. Mitunter ist die Sinusskala S auf der Zunge praktisch für die Berechnung von $e^{\sin x}$. Auch die Umkehrungen bieten weitere Möglichkeiten der logarithmischen Rechnung. Die Skala CF kann anstelle der Skala C beim Rechnen mit LL-Skalen benutzt werden, um das Durchschieben der Zunge bei Tabellenbildungen einzusparen, wenn die Basis etwa in der Stabmitte liegt.

18.1 Proportionsrechnung mit den Exponentialskalen

Wenn ein Basiswert a mit dem Anfang der Skala C auf einer LL-Skala eingestellt ist, können die Potenzwerte für beliebige Exponenten oder die Logarithmen beliebiger Zahlen für diese Basis abgelesen werden. Somit ist eine Proportion eingestellt.

18.1.1 $y_1 = a^n \qquad y_2 = a^m$

$\log y_1 = n \cdot \log a, \quad \log y_2 = m \cdot \log a$

$$\frac{\log a}{1} = \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m}, \text{ oder auch}$$

$$\frac{\ln a}{1} = \frac{\ln y_1}{n} = \frac{\ln y_2}{m}$$

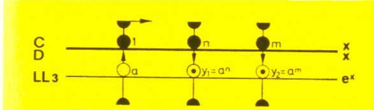


Abb. 53

Wenn drei Werte der Proportion bekannt sind, kann der vierte Wert berechnet werden, und mit der ersten Einstellung überblickt man eine Vielzahl von Proportionen. Wir haben hiermit wieder ein für das Rechnen mit dem Rechenstab günstiges Proportionsprinzip, und es kommt nur darauf an, die Aufgaben in diese Proportionsform zu bringen.

18.1.2

$$y = a^{\frac{m}{n}} \longrightarrow \log y = \frac{m}{n} \log a$$

$$\frac{\log y}{m} = \frac{\log a}{n}$$

$$y = 4{,}3^{\frac{6{,}8}{2{,}7}} \longrightarrow \frac{\log y}{6{,}8} = \frac{\log 4{,}3}{2{,}7}$$

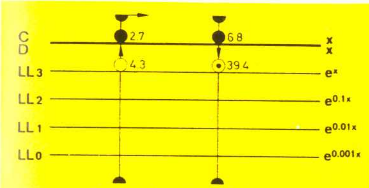


Abb. 54 $\frac{\log 4{,}3}{2{,}7} = \frac{\log 39{,}4}{6{,}8}$

Werden 4,3 auf Skala LL3 und 2,7 auf Skala C übereinandergestellt, dann kann unter 6,8 der Skala C das Ergebnis 39,4 auf Skala LL3 abgelesen werden.

Ebenso werden natürlich die Abwandlungen dieser Aufgabe gelöst.

$$y = \sqrt[2{,}7]{4{,}3^{6{,}8}} \quad \text{oder} \quad y^{2{,}7} = 4{,}3^{6{,}8}$$

18.1.3

Viele Naturgesetze lassen sich auf die angegebene Proportionsform bringen, wenn die Änderung (Differenz) der einen Variablen proportional der Differenz der Logarithmen der anderen Veränderlichen ist*:

$$\log y_2 - \log y_1 = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

Da außerdem gilt $\quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b},$

läßt sich diese Gleichung umschreiben:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

*) Vergleiche:

Ruppert, W: Über die Druckabhängigkeit der Viskosität von Schmierölen — Zeitschrift Brennstoffchemie Nr. 15/16 Bd. 33 (1952) S. 273-278

Ruppert, W: Eine neue allgemeine Fassung einiger Naturgesetze und ihre Anwendung mit modernen Rechenstäben — Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bd. 6 Heft 7 (Febr. 1954), S. 316

Eine Änderung von x_1 auf x_2 um das Intervall i hat eine Änderung von y_1 auf y_2 zur Folge.

Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{y_2}{y_1}$ mit r, das ist die Restzahl, die den Rest vom ursprünglichen Ganzen angibt, dann lautet die obige Gleichung:

$$\frac{\log r}{i} = \text{const} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \cdots$$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall.

Ein Stoff zerfalle in 30 Tagen zu 40%, es verbleiben 60% als Rest.

Wann sind noch 20% vorhanden?

$i_1 = 30$

$r_1 = 0{,}6$

$r_2 = 0{,}2$

$$\frac{\log 0{,}6}{30} = \frac{\log 0{,}2}{x}$$

$x = 94{,}5$ Tage

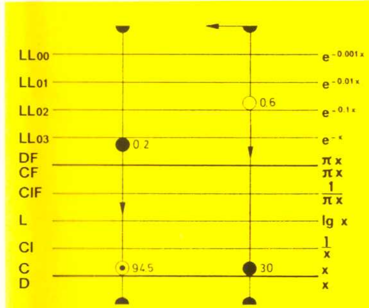


Abb. 55

18.1.4

Will man einen Logarithmus mit einer konstanten Zahl multiplizieren, so werden die Konstante auf Skala C und die Basis des Logarithmus auf Skala LL untereinandergestellt, um wieder eine Tabellenstellung für die Multiplikation der Konstanten mit Logarithmen der eingestellten Basis zu erhalten.

Für $x = c \cdot \log_a y$ wird die Proportionsform geschrieben:

$$\frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

$2 \cdot \log_{10} 100 = 4$

$2 \cdot \log_{10} 1{,}8 = 0{,}511$

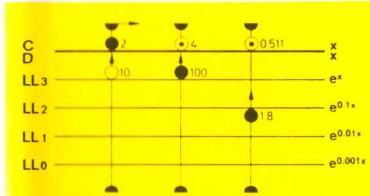


Abb. 56 $x = 2 \cdot \lg y$

Alle Logarithmen der Basis 10 können nach Abb. 56 mit dem Faktor 2 multipliziert werden, mit den LL0-Skalen auch die Logarithmen von Werten < 1.

In der Physik und der Nachrichtentechnik ist es häufig erforderlich, die Dezibel (dB) zu einem gegebenen Amplitudenverhältnis zu berechnen:

$$\text{dB} \mathrel{\hat{=}} 20 \lg \frac{A_1}{A_2}$$

Beispiele:

20 dB = 20 lg 10

40 dB = 20 lg 100

5,11 dB = 20 lg 1,8

19. Die hyperbolischen Funktionen

Die Skalen Sh1, Sh2, Ch und Th beziehen sich wie alle Winkelfunktionsskalen auf die Skala D. Zu jeder Einstellung des Argumentes in Sh, Ch oder Th kann auf der Skala D der entsprechende Funktionswert abgelesen werden.

In den Skalen der hyperbolischen Funktionen sind die Argumente nicht im Winkelmaß, sondern im Bogenmaß angegeben. Der Übergang vom Winkelmaß in das Bogenmaß und umgekehrt wird nach der im Kap. 15.2 beschriebenen Methode mit den Skalen C und ST durchgeführt.

Mit den Skalen Sh1, Sh2, Ch und Th kann, wie mit den trigonometrischen Skalen S und T, beliebig multipliziert und dividiert werden, so daß auch Ausdrücke der Form sinh x · cos y usw. mit dem Rechenstab berechnet werden können.

19.1 Die Skalen Sh1 und Sh2

Für alle in Skala Sh1 eingestellten Argumente x von 0,1 bis 0,881 können der Skala D die Funktionswerte sinh x von 0,1 bis 1,0 entnommen werden. Mit Hilfe der Fortsetzungsskala Sh2 ergeben sich entsprechend für die Argumente x von 0,85 bis 3,0 die Funktionswerte sinh x von 1 bis 10.

Für $x > 3$ gilt $\sinh x \approx \frac{e^x}{2}$,

für $x < 0{,}1$ wird $\sinh x \approx x$.

Beispiele:

1. sinh 0,349 = 0,356
2. sinh 0,885 = 1,005
3. sinh 1,742 = 2,77

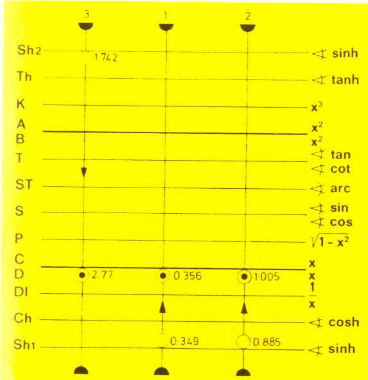


Abb. 57 Hyperbolischer Sinus

Selbstverständlich kann auch die Umkehrung gebildet werden, um zu einem gegebenen Funktionswert das Argument im Bogenmaß zu finden.

Zu sinh x = 2,77 lautet die Umkehrung x = ar sinh 2,77 = 1,742.

19.2 Die Skala Ch

Zu jedem in Skala Ch eingestellten Argument $0 < x < 3$ wird der Funktionswert cosh x im Bereich 1 bis 10 der Skala D entnommen.

Für $x < 0{,}1$ wird $\cosh x \approx 1$ und für $x > 3$ wird $\cosh x \approx \frac{e^x}{2} \approx \sinh x$

Beispiele:

1. cosh 0,437 = 1,097
2. cosh 0,163 = 1,013
3. cosh 1,5 = 2,352

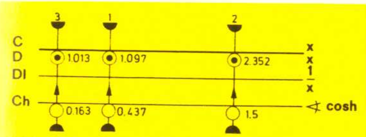


Abb. 58 Hyperbolischer Kosinus

Die Skalen H1 und H2 geben in Verbindung mit den Skalen Sh1 und Sh2 eine weitere Möglichkeit für die Ablesung des hyperbolischen Kosinus nach der Formel

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}.$$

Zu jedem in Skala Sh eingestellten Argument steht der Funktionswert in Skala D und zu jedem Wert x in Skala D steht $\sqrt{1 + x^2}$ in Skala H. Folglich steht jeder Einstellung des Argumentes x in Skala Sh der cosh x in Skala H gegenüber.

Gegenüber dem Bereich $0{,}1 < x < 1{,}0$ in D steht $1{,}005 < \sqrt{1 + x^2} < 1{,}41$ in H1, gegenüber dem Bereich $1{,}0 < x < 10$ in D steht $1{,}41 < \sqrt{1 + x^2} < 10{,}06$ in H2.

Ein Vergleich mit den Angaben in Kap. 19.1 zeigt, daß bei der Ablesung des hyperbolischen Kosinus die Skalen Sh1 und H1 sowie Sh2 und H2 zusammenarbeiten.

Wenn die Einstellung im linken Teil der Skala Ch unsicher wird, geben die Skalen Sh1 und H1 eine größere Genauigkeit. Sie erfüllen praktisch eine ähnliche Zusammenarbeit wie die Skalen S und P.

Abb. 59 gibt die Ablesebeispiele im Vergleich zur Abb. 58.

cosh 0,437 = 1,0971

cosh 1,5 = 2,352

cosh 0,163 = 1,0133

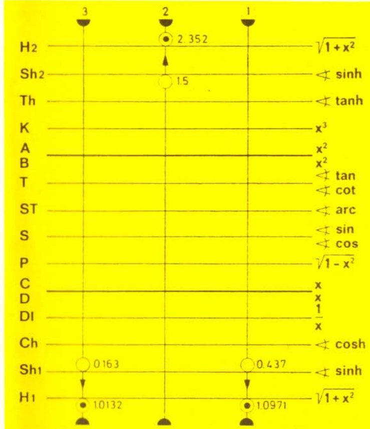


Abb. 59 Hyperbolischer Kosinus

19.3 Die Skala Th

gilt für Argumente x von 0,1 bis 3,0, zu denen auf Skala D die entsprechenden Funktionswerte tanh x von 0,1 bis 0,995 abgelesen werden können.

Für $x > 3$ gilt $\tanh x \approx 1 - 2e^{-2x} \approx 1$

Für $x < 0{,}1$ gilt $\tanh x \approx x$.

Beispiele:

tanh 0,257 = 0,251

tanh 1,614 = 0,924

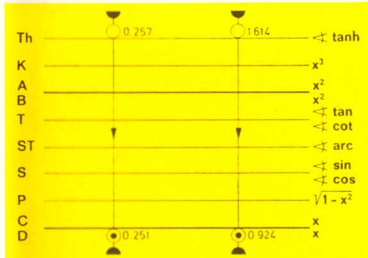


Abb. 60 Hyperbolischer Tangens

Der Funktionswert coth x wird nach der Beziehung $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ der Skala DI entnommen, wenn x auf Skala Th eingestellt ist.

Beispiel:

tanh 0,549 = 0,500

coth 0,549 = 2,000

Für $x < 0{,}1$ gilt $\coth x \approx \frac{1}{x}$

Für $x > 3$ gilt $\coth x \approx 1$

19.4 Grundformeln der hyperbolischen Funktionen

Gelegentlich ist es nützlich, die Grundformeln der hyperbolischen Funktionen und ihre Beziehungen zueinander parat zu haben:

$$\sinh x = {}^1/_2\,(e^{+x} - e^{-x}) \qquad \sinh x + \cosh x = e^x$$

$$\cosh x = {}^1/_2\,(e^{+x} + e^{-x}) \qquad -\sinh x + \cosh x = e^{-x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\tanh x \cdot \coth x = 1 \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

20. Die hyperbolischen Funktionen mit komplexem Argument

Zur Berechnung der Funktionswerte von Kreis- und Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument sind aus der Literatur folgende Formeln bekannt:

(a) $\sinh\,(x \pm j\,y) = \sinh\,x \cdot \cos y \;\pm j \cosh x \cdot \sin y$

(b) $\cosh\,(x \pm j\,y) = \cosh\,x \cdot \cos y \;\pm j \sinh x \cdot \sin y$

(c) $\sin\,(x \pm j\,y) = \sin\,x \cdot \cosh y \pm j \cos\,x \cdot \sinh y$

(d) $\cos\,(x \pm j\,y) = \cos\,x \cdot \cosh y \mp j \sin\,x \cdot \sinh y$

(e) $\tanh\,(x \pm j\,y) = \dfrac{\tanh x \pm j \tan y}{1 \pm j \tanh x \cdot \tan y}$

(f) $\tan\,(x \pm j\,y) = \dfrac{\tan x \pm j \tanh y}{1 \mp j \tan x \cdot \tanh y}$

Beim Rechnen mit diesen Formeln ist zu beachten, daß die Argumente der vorkommenden Funktionen im Bogenmaß und im Winkelmaß benötigt werden können.

Aus den Formeln (a) bis (d) ergibt sich der komplexe Funktionswert zunächst in der Komponentenform a + j b. Daraus läßt sich in gewohnter Weise (Kap. 16 und 16.1) die Vektorform $r/\underline{\varphi}$ errechnen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\sinh\,(0{,}25 + j\,12{,}7°) &= \sinh 0{,}25 \cdot \cos 12{,}7° + j \cosh 0{,}25 \cdot \sin 12{,}7°\\ &= 0{,}2526 \cdot 0{,}976 + j\,1{,}013 \cdot 0{,}2198\\ &= 0{,}2464 + j\,0{,}2267\\ &= 0{,}335\,/\underline{42{,}6°}\\ \sin\,(1{,}05 + j\,0{,}61) &= \sin 60{,}2° \cdot \cosh 0{,}61 + j \cos 60{,}2° \cdot \sinh 0{,}61\\ &= 1{,}035 + j\,0{,}322 = 1{,}083\,/\underline{17{,}3°}\end{aligned}$$

Zwischenrechnung: 1,05 rad = 60,2°

Man wird natürlich die einzelnen Funktionswerte nicht erst ablesen, sondern sofort mit den Skalenwerten multiplizieren, trotzdem ist die Rechnung etwas langwierig. Im folgenden soll daher eine Methode angegeben werden, wie derartige Berechnungen schneller durchgeführt werden können.

20.1 sinh (x + j y)

Die Formel $\sinh(x + jy) = \sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y$ läßt sich wie gewohnt als Vektor mit den Komponenten $a = \sinh x \cdot \cos y$ und $b = \cosh x \cdot \sin y$ darstellen (Abb. 61).

Aus dem Deieck der Abb. 61 läßt sich φ berechnen:

$$\tan\varphi = \frac{\cosh x \cdot \sin y}{\sinh x \cdot \cos y} = \frac{\cosh x}{\sinh x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\tan\varphi = \frac{\tan y}{\tanh x}$$

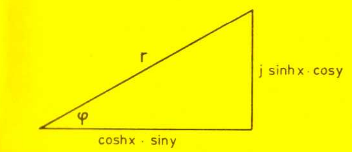


Abb. 61

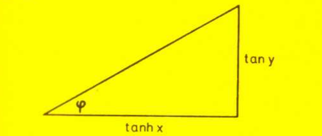


Abb. 62

Dieser Gleichung entspricht ein der Abb. 62 ähnliches Dreieck mit dem gleichen Winkel φ, aber mit den veränderten Seiten tan y und tanh x.

Die neue Formel ermöglicht eine schnelle Berechnung der gesuchten Größen φ und r, denn wenn φ aus der Gleichung für $\tan\varphi$ bekannt ist, gilt: $r = \dfrac{\sinh x \cdot \cos y}{\cos\varphi}$.

Diese Gleichung ist aus Abb. 61 ablesbar. Durch Quadrieren der Seiten des gleichen Dreiecks ergibt sich als Kontrolle: $r^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$.

Die an sich leichte Divisionsaufgabe $\tan\varphi = \dfrac{\tan y}{\tanh x}$ bietet einige Schwierigkeiten, wenn man nach der kürzesten Rechenmethode sucht, weil je nach Größe der Argumente φ und y andere Einstellregeln gelten.

Der sicherste Schutz gegen Fehlablesungen ist eine Überschlagsrechnung mit abgerundeten Werten.

Beispiel: sinh (0,25 + j 12,7°)

Ein Blick auf die Skalen Th und T zeigt, daß tan 12,7° links von tanh 0,25 liegt, also einen kleineren Funktionswert hat. Damit ist auch $\tan\varphi < 1$ und $\varphi < 45°$.

$\tan\varphi = \dfrac{\tan 12{,}7°}{\tanh 0{,}25}$ wird zur Proportion abgewandelt $\dfrac{\tanh 0{,}25}{\tan 12{,}7°} = \dfrac{1}{\tan\varphi}$

Diese Proportionsform ist für den Rechenstab am geeignetsten, man braucht nur die Werte 0,25 der Skala Th und 12,7° der Skala T übereinanderzustellen, dann kann φ über dem Körperende aus Skala T entnommen werden.

$$\tan\varphi = \frac{\tan 12{,}7°}{\tanh 0{,}25} = 42{,}6°$$

Überschlagsrechnung:

$$\tan\varphi \approx \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8 \quad \varphi \approx 40°$$

$$r = \frac{\sinh 0{,}25}{\cos 42{,}6°} \cdot \cos 12{,}7° = 0{,}335$$

$$r = \sqrt{\sinh^2 0{,}25 + \sin^2 12{,}7°}$$

$$r = \sqrt{0{,}0484 + 0{,}0639} = 0{,}335.$$

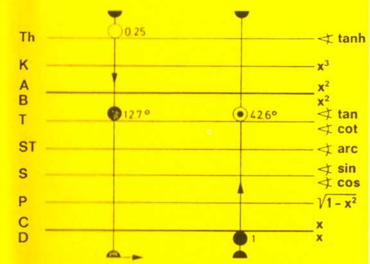


Abb. 63 $\varphi = 42{,}6°$

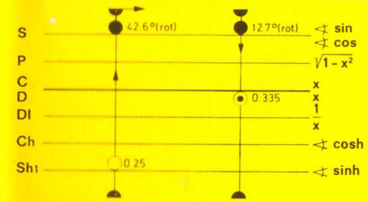


Abb. 64 r = 0,335

Ergebnis:

$$\sinh(0{,}25 + j\,12{,}7°) = 0{,}335 \;\; /\underline{42{,}6°}$$

Um diese abgekürzte Lösung des Problems in allen Winkelkombinationen zu ermöglichen, werden die Einstellungen und Ablesungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Wer ständig derartige Rechnungen durchführen muß, wird diese Einstellungen bald beherrschen und viel Zeit sparen. Wer nur gelegentlich Rechnungen dieser Art ausführt und diese Tabelle nicht zur Hand hat, dürfte sicherer zum Ziele kommen, wenn erst die Funktionswerte für tanh x und tan y abgelesen werden und dann die Division ausgeführt wird.

Berechnung von $\tan\varphi = \dfrac{\tan y}{\tanh x}$

y	x	1. Einstellung y in	2. Einstellung Läufer	Ablesg. φ	φ
5,5°–45°	tanh x > tan y	T unter x in Th	nach Ende D	in T	< 45°
5,5°–45°	tanh x < tan y	T unter x in Th	nach Ende C dann Zunge in Grundstellung	in T (rot)	> 45°
< 5,5°	tanh x < 10·tan y	ST unter x in Th	über Anfang D	in T	> 5,5°
< 5,5°	tanh x > 10·tan y	ST unter x in Th	nach Ende D	in ST	< 5,5°
> 45°	10·tanh x > tan y	T (rot) über Skalenende D	nach x in Th	in T (rot)	> 45°
> 45°	10·tanh x < tan y	T (rot) über Skalenanfang D	nach x in Th	in St rückläufig	> 45°

Die Berechnung der Hypotenuse $r = \dfrac{\sinh x}{\cos\varphi}\cdot\cos y$ bietet keine Schwierigkeiten, wenn man beachtet, daß die Kosinuswerte in Skala S mit roter Bezifferung eingestellt werden müssen.

Beispiele zur vorausgestellten Tabelle:

1.

$\sinh(0{,}361 + j\,11{,}8°) = 0{,}422\underline{/31{,}12°}$

$\tanh 0{,}361 > \tan 11{,}8°$

$\varphi = 31{,}12°$

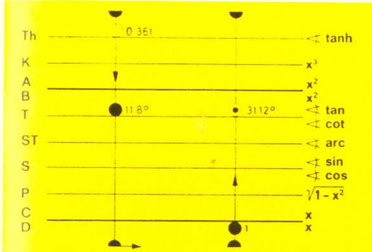


Abb. 65 $\varphi = 31{,}12°$

$r = \dfrac{\sinh 0{,}361}{\cos 31{,}12°}\cdot\cos 11{,}8°$

$r = 0{,}422$

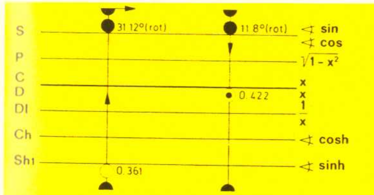


Abb. 66 r = 0,422

2.

$\sinh(0{,}38 + j\,32°) = 0{,}657\underline{/59{,}87°}$

$\tanh 0{,}38 < \tan 32°$

$\varphi = 59{,}87°$

tanh 0,38 und tan 32° übereinander einstellen und Läufer zum Zungenende schieben, dann steht in Skala DI der Wert $\tan\varphi = 1{,}725$. Läufer stehen lassen und Zunge in Grundstellung bringen, um $\varphi = 59{,}87°$ in Skala T ablesen zu können.

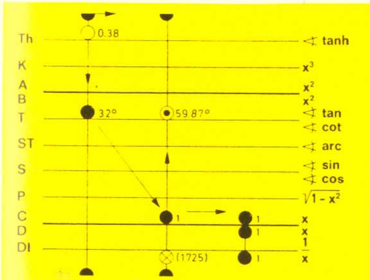


Abb. 67 $\varphi = 59{,}87°$

3.

$\sinh(0{,}262 + j\,4{,}52°) = 0{,}2764\underline{/17{,}13°}$

$\tanh 0{,}262 < 10\cdot\tan 4{,}52°$

$\varphi = 17{,}13°$

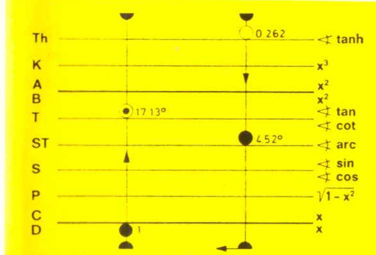


Abb. 68 $\varphi = 17{,}13°$

4.

$\sinh(1{,}13 + j\,3{,}8°) = 1{,}388\underline{/4{,}68°}$

$\tanh 1{,}13 > 10\tan 3{,}8°$

$\varphi = 4{,}68°$

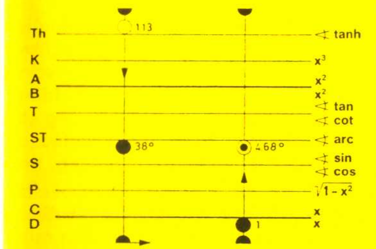


Abb. 69 $\varphi = 4{,}68°$

5.

$\sinh(0{,}195 + j\,51{,}1°) = 0{,}8025\underline{/81{,}17°}$

$10\cdot\tanh 0{,}195 > \tan 51{,}1°$

$\varphi = 81{,}17°$

Abb. 70 $\varphi = 81{,}17°$

6.

$\sinh(0{,}274 + j\,73{,}5°) = 0{,}997\underline{/85{,}47°}$

$10\cdot\tanh 0{,}274 < \tan 73{,}5°$

$\varphi = 85{,}47°$

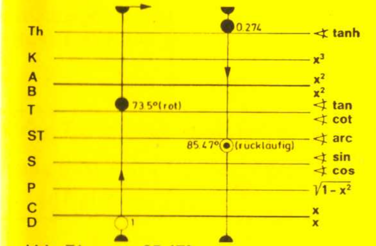


Abb. 71 $\varphi = 85{,}47°$

$r = \dfrac{\sinh 0{,}274}{\cos 85{,}47°}\cdot\cos 73{,}5°$

$r = 0{,}997$

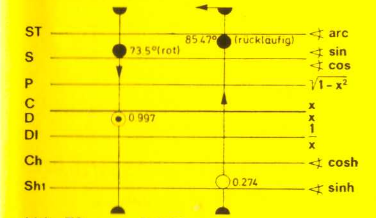


Abb. 72 r = 0,997

20.2 cosh (x + j y)

In ähnlicher Weise läßt sich die Berechnung des hyperbolischen Kosinus mit komplexem Argument durchführen.

$\cosh(x + j\,y) = \cosh x \cdot \cos y + j \sinh x \cdot \sin y$

(a) $\tan\varphi = \tanh x \cdot \tan y$

(b) $r \quad = \dfrac{\sinh x \cdot \sin y}{\sin\varphi}$

(c) $r^2 \quad = \sinh^2 x + \cos^2 y$

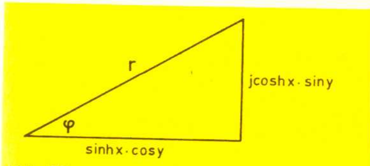


Abb. 73

Gleichung (c) bietet wieder die Möglichkeit, r ohne Kenntnis des Winkels φ zu berechnen, indem man sich ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten sinh x und cos y sowie der Hypotenuse r vorstellt. Im allgemeinen sind jedoch φ und r gesucht. Aus Gleichung (a) wird dann der Winkel φ berechnet, und die Hypotenuse r ergibt sich aus Gleichung (b). Diese Berechnung von r bietet keine Schwierigkeiten, aber die zweifache Verwendung der Tangensfunktion in (a) erfordert einige Überlegungen, insbesondere wenn die Winkel > 45° sind.

Auch bei diesen Aufgaben ist es besser, gelegentliche Rechnungen lieber etwas umständlich, aber richtig durchzuführen. Für diejenigen Benutzer, die häufig derartige Aufgaben durchrechnen müssen, gibt die folgende Übersicht die Einstellungen an, mit denen Aufgaben der Formel cosh (x + j y) am schnellsten und genauesten gerechnet werden können.

y	x	1. Einstellung	2. Einstellung	Ablesung φ	φ
< 45°	0,1 < x < 3,0	y in T über Anfang oder Ende D	Läufer nach x in Th	in T bzw. ST (schwarz)	< 45°
Aus welcher Skala (T oder ST) der Winkel entnommen wird, hängt von einer Überschlagsrechnung ab.		a) 0,1 < tanh x · tan y < 1 b) 0,01 < tanh x · tan y < 0,1 c) tanh x · tan y < 0,01		in T in ST in ST	< 45° < 5,7° < 0,57°
> 45°	cot y > tanh x	In Grundstellung der Zunge, Läufer auf y in T (rot)	rechtes Zungenende unter Läuferstrich	Läufer nach x in Th, darunter in T (schwarz)	< 45°
cot y ist der zur Einstellung y in T gehörige Wert auf C					
> 45°	cot y < tanh x	y in T (rot) unter x in Th	Läufer über Ende D	in T (rot)	> 45°

Beispiele zur Tabelle:

1 a.

$\cosh(0{,}523 + j\,38{,}6°) = 0{,}954/\underline{20{,}97°}$

$\tanh 0{,}523 \cdot \tan 38{,}6° \approx 0{,}4,$

$\varphi = 20{,}97°$

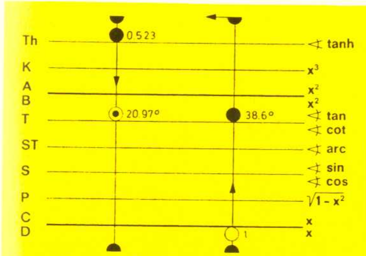


Abb. 74 $\varphi = 20{,}97°$

$r = \dfrac{\sinh 0{,}523}{\sin 20{,}97°} \cdot \sin 38{,}6°$

$r = 0{,}954$

1 b.

$\cosh(0{,}261 + j\,20{,}06°) = 0{,}976/\underline{5{,}32°}$

$\tanh 0{,}261 \cdot \tan 20{,}06° \approx 0{,}09$

$\varphi = 5{,}32°$

$r = \dfrac{\sinh 0{,}261}{\sin 5{,}32°} \cdot \sin 20{,}06°$

$r = 0{,}976$

1 c.

$\cosh(0{,}183 + j\,2{,}31°) = 1{,}020/\underline{0{,}417°}$

$\tanh 0{,}183 \cdot \tan 2{,}31° \approx 0{,}008$

$\varphi = 0{,}417°$

2.

$\cosh(0{,}525 + j\,52{,}4°) = 0{,}821/\underline{32°}$

$\cot 52{,}4° > \tanh 0{,}525,$

$\varphi = 32°$

Bei Grundstellung der Zunge tan 52,4° in Skala T mit dem Läufer einstellen, dann Zungeneins unter den Läuferstrich schieben.

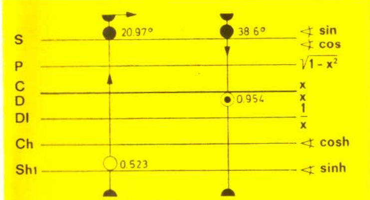


Abb. 75 r = 0,954

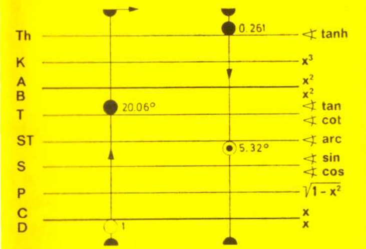


Abb. 76 $\varphi = 5{,}32°$

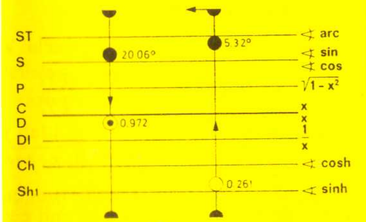


Abb. 77 r = 0,976

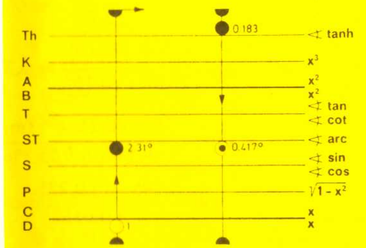


Abb. 78 $\varphi = 0{,}417°$

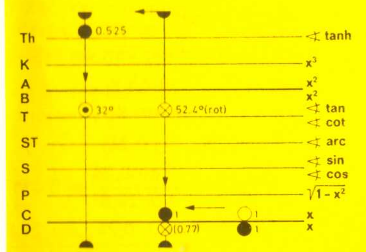


Abb. 79 $\varphi = 32°$

3.

$\cosh(0{,}318 + j\,79{,}5^\circ) = 0{,}371\,\underline{/58{,}92^\circ}$

$\cot 79{,}5^\circ < \tanh 0{,}318$

$\varphi = 58{,}92^\circ$

$$r = \frac{\sinh 0{,}318}{\sin 58{,}92^\circ} \cdot \sin 79{,}5^\circ$$

$r = 0{,}371$

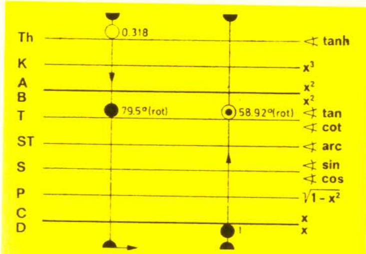


Abb. 80 $\varphi = 58{,}92^\circ$

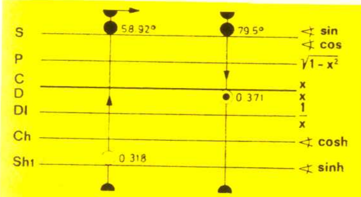


Abb. 81 $r = 0{,}371$

20.3 tanh (x + j y)

Dieser Ausdruck kann auf zweierlei Weise gerechnet werden

(a) $\tanh(x \pm j\,y) = \dfrac{\sinh(x \pm j\,y)}{\cosh(x \pm j\,y)}$

(b) $\tanh(x \pm j\,y) = \dfrac{\tanh x \pm j \tan y}{1 \pm j \tanh x \cdot \tan y}$

Die Frage nach der besseren Lösung möge jeder für sich entscheiden. Wer in der Berechnung des sinh (x + j y) und cosh (x + j y) sicher ist, wird die Formel (a) bevorzugen, weil diese schneller zum Ziele führt.

Beispiel: $\tanh(0{,}25 + j\,12{,}7^\circ)$

Formel (a) ergibt: $\dfrac{0{,}335\ \underline{/42{,}62^\circ}}{1{,}008\ \underline{/3{,}16^\circ}} = 0{,}333\ \underline{/39{,}46^\circ}$

Formel (b) ergibt: $\dfrac{\tanh 0{,}25 + j \tan 12{,}7^\circ}{1 + j \tanh 0{,}25 \cdot \tan 12{,}7^\circ} = \dfrac{0{,}245 + j\,0{,}225}{1 + j\,0{,}245 \cdot 0{,}225}$

$$= \frac{0{,}245 + j\,0{,}225}{1 + j\,0{,}0552} = \frac{0{,}333\ \underline{/42{,}62^\circ}}{1{,}00\ \underline{/3{,}16^\circ}} = 0{,}333\ \underline{/39{,}46^\circ}$$

21. Die trigonometrischen Funktionen mit komplexem Argument

1. Für die Umrechnung von sin (x + j y) gelten die Formeln:

$$\tan\varphi = \frac{\tanh y}{\tan x} \qquad r = \frac{\sinh y \cdot \cos x}{\sin\varphi}$$

Beispiel: $\sin(0{,}52 + j\,0{,}24)$

Man erhält $\tan\varphi = \dfrac{\tanh 0{,}24}{\tan 29{,}8^\circ} = 0{,}411$; $\varphi = 22{,}4^\circ$

$$r = \frac{\sinh 0{,}24 \cdot \cos 29{,}8^\circ}{\sin 22{,}4^\circ} = 0{,}552$$

2. Entsprechend gelten für cos (x + j y) die Formeln:

$$\tan\varphi = \tanh y \cdot \tan x \qquad r = \frac{\sinh y \cdot \sin x}{\sin\varphi}$$

Beispiel: $\cos(0{,}52 + j\,0{,}24)$

Man erhält $\tan\varphi = \tanh 0{,}24 \cdot \tan 29{,}8^\circ = 0{,}135$; $\varphi = 7{,}7^\circ$

$$r = \frac{\sinh 0{,}24 \cdot \sin 29{,}8^\circ}{\sin 7{,}7^\circ} = 0{,}899$$

3. Für die Umrechnung von tan (x + j y) gilt die Formel (f) im Kap. 20, etwas kürzer wird die Rechnung mit der Division $\tan(x + j\,y) = \dfrac{\sin(x + j\,y)}{\cos(x + j\,y)}$.

22. Die Umkehrung der Aufgaben aus Kap. 20 und 21

Die Umkehrung, das komplexe Argument x + j y zu berechnen, wenn dessen hyperbolische Funktion in der Form $r\underline{/\varphi}$ gegeben ist, wird etwas umständlicher. Der Gang der Rechnung soll wieder für hyperbolische Sinusfunktionen ausführlich behandelt werden.

22.1 ar sinh $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Zur Umrechnung der vektoriellen Darstellung $r\underline{/\varphi}$ in sinh (x + j y) wird der Vektor in seine Komponenten a und b zerlegt. Diese Aufgabe bietet keine Schwierigkeiten (vgl. Kap. 16 und 16.1).

$\sinh(x + j\,y) = r\underline{/\varphi} = r\cos\varphi + j\,r\sin\varphi = a + j\,b.$

Die Werte x und y sollen Funktionen von a und b sein.

Ausgehend von $\sinh(x + j\,y) = \sinh x \cdot \cos y + j \cosh x \cdot \sin y = a + jb$ lassen sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufstellen, aus denen x und y berechnet werden können:

$$a^2 + (1 + b)^2 = M^2 = (\cosh x + \sin y)^2$$
$$a^2 + (1 - b)^2 = N^2 = (\cosh x - \sin y)^2$$
$$2\cosh x = M + N$$
$$2\sin\ y = M - N$$

y wird aus $\sin y = \dfrac{M - N}{2}$ berechnet. Zur Ermittlung des Wertes x gelten die Gleichungen $\sinh x = \dfrac{a}{\cos y}$ oder $\cosh x = \dfrac{M + N}{2}$.

Nach den obigen Gleichungen lassen sich die Werte M und N als Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken darstellen, deren Katheten a und (1 + b) bzw. a und (1 − b) sind.

Die Berechnung der Hypotenuse ist nach den in den Kap. 13.2 und 16 gegebenen Regeln sehr einfach. Die Winkel sind in diesem Falle ohne Bedeutung.

Beispiel:

$\sinh(x + j\,y) = 0{,}422\ \underline{/31{,}12^\circ}$ (vgl. Beispiel 1 auf S. 38), gesucht x und y

$0{,}422\ \underline{/31{,}12^\circ} = a + j\,b = 0{,}361 + j\,0{,}218$

Dreieck mit a $= 0{,}361$ und $1 + b = 1{,}218$ gibt $M = 1{,}270$

Dreieck mit a $= 0{,}361$ und $1 - b = 0{,}782$ gibt $N = 0{,}861$

$M - N = 0{,}409$ | $M + N = 2{,}131 = 2 \cosh x$

$\tfrac{1}{2}(M - N) = 0{,}2045 = \sin y$ | $\cosh x = 1{,}0655$

$y = 11{,}8^\circ$ | $x = 0{,}360$

Unter 1,0655 in Skala D steht $x = 0{,}360$ in Ch
über 1,0655 in Skala H_1 steht $x = 0{,}360$ in Sh_1

22.2 ar cosh $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Der Rechenvorgang ist der gleiche wie im vorhergehenden Beispiel, nur die Formeln sind für den hyperbolischen Kosinus abgewandelt:

$$M^2 = (1 + a)^2 + b^2 \qquad \cos y = \tfrac{1}{2}(M - N)$$

$$N^2 = (1 - a)^2 + b^2 \qquad \sinh x = \frac{b}{\sin y}$$

Beispiel:

$\cosh(x + j\,y) = 0{,}954\,\underline{/20{,}97^\circ}$ (vgl. Beispiel 1a auf S. 40)

$\underline{a + j\,b = 0{,}892 + j\,0{,}3413}$

Dreieck mit $1 + a = 1{,}892$ und $b = 0{,}3413$ gibt $M = 1{,}922$

Dreieck mit $1 - a = 0{,}108$ und $b = 0{,}3413$ gibt $N = 0{,}358$

$M - N = 1{,}564$

$\tfrac{1}{2}(M - N) = 0{,}782 = \cos y \qquad y = 38{,}6^\circ$

$\sinh x = \dfrac{0{,}3413}{\sin 38{,}6^\circ} \qquad x = 0{,}523$

$0{,}954\,\underline{/20{,}97^\circ} = \cosh(0{,}523 + j\,38{,}6^\circ)$

22.3 ar tanh $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Für die Berechnung der Größen x und y gibt es wieder zwei Gleichungen:

$$\tanh 2x = \frac{2r\cos\varphi}{1 + r^2} = \frac{2\cos\varphi}{1/r + r}$$

$$\tan 2y = \frac{2r\sin\varphi}{1 - r^2} = \frac{2\sin\varphi}{1/r - r}$$

(vgl. *Rint*, Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker)

Beispiel: $0{,}333\,\underline{/39{,}46^\circ} = \tanh(x + j\,y)$ (vgl. Kap. 20.3)

$$\tanh 2x = \frac{2 \cdot \cos 39{,}46^\circ}{3{,}004 + 0{,}333}; \qquad 2x = 0{,}500 \qquad x = 0{,}25$$

$$\tan 2y = \frac{2 \cdot \sin 39{,}46^\circ}{3{,}004 - 0{,}333}; \qquad 2y = 25{,}4^\circ \qquad y = 12{,}7^\circ$$

$0{,}333\,\underline{/39{,}46^\circ} = \tanh(0{,}25 + j\,12{,}7^\circ)$

Die Ausrechnung der Brüche und die Ablesung der Werte 2x bzw. 2y in den Skalen Th und T bieten mit Berücksichtigung der Kapitel 14.2 und 19.3 keine Schwierigkeiten. Zur Berechnung von $1/r$ werden je nach Bedarf die Skalen D und DI oder die Exponentialskalen e^{+x} und e^{-x} als reziproke Skalen benutzt.

22.4 arc sin $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Der Rechenvorgang ist der gleiche wie in Abschnitt 22.1, nur die Formeln sind für den trigonometrischen Sinus abgewandelt.

$$M^2 = (a + 1)^2 + b^2 \qquad \sin x = \frac{M - N}{2}$$

$$N^2 = (a - 1)^2 + b^2 \qquad \sinh y = \frac{b}{\cos x}$$

Beispiel: $0{,}552\,\underline{/22{,}4^\circ} = \sin(x + j\,y)$ (vgl. Kap. 21, Beispiel 1)

Man erhält $0{,}552\,\underline{/22{,}4^\circ} = 0{,}51 + j\,0{,}21$

$$M^2 = 1{,}51^2 + 0{,}21^2;\ M = 1{,}524$$

$$N^2 = 0{,}49^2 + 0{,}21^2;\ N = 0{,}532$$

$$\sin x = \frac{1{,}524 - 0{,}532}{2} = 0{,}496;\ x = 0{,}52$$

$$\sinh y = \frac{0{,}21}{\cos 29{,}8^\circ} = 0{,}242;\ y = 0{,}24$$

22.5 arc cos $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Hier lauten die Formeln

$$M^2 = (a + 1)^2 + b^2 \qquad \cos x = \frac{M - N}{2}$$

$$N^2 = (a - 1)^2 + b^2 \qquad \sinh y = \frac{b}{\sin x}$$

Beispiel: $0{,}899\,\underline{/7{,}7^\circ} = \cos(x + j\,y)$ (vgl. Kap. 21, Beispiel 2)

Man erhält $0{,}899\,\underline{/7{,}7^\circ} = 0{,}891 + j\,0{,}1205$

$$M^2 = 1{,}891^2 + 0{,}1205^2;\ M = 1{,}985$$

$$N^2 = 0{,}109^2 + 0{,}1205^2;\ N = 0{,}162$$

$$\cos x = \frac{1{,}985 - 0{,}162}{2} = 0{,}867;\ x = 0{,}52$$

$$\sinh y = \frac{0{,}1205}{\sin 29{,}8^\circ} = 0{,}242;\ y = 0{,}24$$

22.6 arc tan $r\underline{/\varphi} = x + j\,y$

Hier lauten die Formeln

$$\tan 2x = \frac{2r\cos\varphi}{1 - r^2} = \frac{2\cos\varphi}{1/r - r}$$

$$\tanh 2y = \frac{2r\sin\varphi}{1 + r^2} = \frac{2\sin\varphi}{1/r + r}$$

23. Anwendungsbeispiele

Die Vorteile des Rechenstabes ARISTO-HyperLog sollen an einigen charakteristischen Beispielen aus der Elektrotechnik gezeigt werden. Da die Bezeichnungen der einzelnen Formelgrößen in der Elektrotechnik sehr uneinheitlich sind, sei anfangs eine Zusammenstellung der hier in Anwendung kommenden Symbole gegeben:

In der vektoriellen Darstellung der Vierpoltheorie bedeuten:

$\mathfrak{Z}$	Scheinwiderstand	a	Dämpfungsmaß
$\mathfrak{Z}_0$	Wellenwiderstand	b	Winkelmaß
$\mathfrak{Z}_l$	Leerlaufwiderstand	$\mathfrak{p}$	Reflexionsfaktor
$\mathfrak{Z}_k$	Kurzschlußwiderstand	α	Dämpfungskonstante
$\mathfrak{g}$	$= a + j\,b$ Übertragungsmaß	β	Winkelkonstante

In der Leitungstheorie wird außerdem benutzt:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{g}}{l} = \alpha + j\beta = \frac{a}{l} + j\frac{b}{l} = \text{Übertragungskonstante (Fortpflanzungskonstante)}$$

Einschaltung eines Dämpfungsgliedes

Zwischen einem Sender und einem Empfänger von jeweils 60 Ω Widerstand soll ein Dämpfungsglied mit dem Dämpfungsmaß $a = 1{,}5$ N eingeschaltet werden. Gesucht sind der Längswiderstand r_1 und der Querwiderstand r_2, wenn das Dämpfungsglied als T-Glied aufgebaut wird.

Folgende Vierpolgleichungen kommen zur Anwendung:

(1) $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 \cosh \mathfrak{g} + \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{J}_2 \sinh \mathfrak{g}$

(2) $\mathfrak{Z}_0 \cdot \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{U}_2 \sinh \mathfrak{g} + \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{J}_2 \cosh \mathfrak{g}$

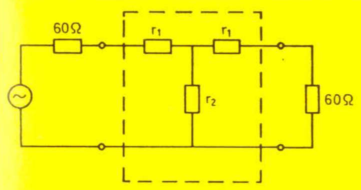


Abb. 82

Aus der Aufgabenstellung folgt der Übertragungsfaktor $\mathfrak{g} = a + j\,b = 1{,}5 + j\,0$. Für den Leerlauf (Sekundärseite offen) ergibt sich aus Gleichung (1) das Spannungsübersetzungsverhältnis

(3) $\dfrac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{2l}} = \cosh \mathfrak{g} = \cosh 1{,}5 = 2{,}352$

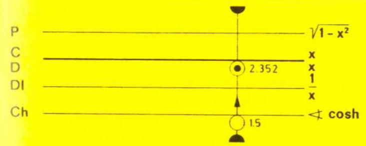


Abb. 83

Weiter folgt durch Division der Gleichungen (1) und (2) für den Leerlauffall der Eingangswiderstand $\mathfrak{Z}_l$, nämlich

$$\frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{Z}_0} = \coth \mathfrak{g} = \coth 1{,}5 = 1{,}105$$

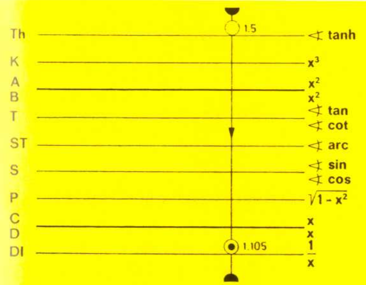


Abb. 84

Der Läufer des Rechenstabes wird auf den Wert 1,5 der Skala Th gestellt, das Ergebnis 1,105 wird darunter in Skala DI abgelesen.

Das Leerlauf-Spannungsverhältnis läßt sich andererseits aus dem Schaltbild des T-Gliedes ablesen:

$$\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{2l}} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 2{,}352 \text{ siehe Gleichung (3)}$$

Da $\mathfrak{Z}_l = \mathfrak{Z}_0 \cdot \coth \mathfrak{g} = 60 \cdot 1{,}105 = 66{,}3\ \Omega$ und auch $\mathfrak{Z}_l = r_1 + r_2 = 66{,}3\ \Omega$ ist, folgt:

$$r_2 = \frac{66{,}3}{2{,}352} = 28{,}2\ \Omega \qquad r_1 = 66{,}3 - 28{,}2 = 38{,}1\ \Omega$$

Leerlaufwiderstand und Kurzschlußwiderstand eines Fernmeldekabels aus Cu, 0,2 mm ⌀ von 10 km Länge. Hierfür beträgt

$\mathfrak{Z}_0 = Z_0 \underline{/\varphi} = 670\ \Omega \underline{/-41{,}6°}$

$a = 0{,}814$ N (Dämpfungsmaß)

$b = 0{,}843$ rad $= 48{,}3°$ (Winkelmaß)

$\mathfrak{g} = a + j\,b = 0{,}814 + j\,48{,}3°$ (Übertragungsmaß)

Berechnung des Leerlaufwiderstandes:

$$\mathfrak{Z}_l = \mathfrak{Z}_0 \cdot \coth \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{Z}_l = 670 \underline{/-41{,}6°} \cdot \coth (0{,}814 + j\,48{,}3°)$$

$$= 670 \underline{/-41{,}6°} \cdot \frac{\cosh (0{,}814 + j\,48{,}3°)}{\sinh (0{,}814 + j\,48{,}3°)}$$

$$= 670 \underline{/-41{,}6°} \cdot \frac{1{,}125 \underline{/37°}}{1{,}173 \underline{/59{,}1°}} = 642 \underline{/-63{,}7°}$$

$$\mathfrak{Z}_l = (284{,}2 - j\,575)\ \Omega$$

Berechnung des Kurzschlußwiderstandes:

$$\mathfrak{Z}_f = 670 \underline{/-41{,}6°} \cdot \tanh (0{,}814 + j\,48{,}3°)$$

$$= 670 \underline{/-41{,}6°} \cdot \frac{1{,}173 \underline{/59{,}1°}}{1{,}125 \underline{/37°}} = 699 \underline{/-19{,}5°}$$

$$\mathfrak{Z}_f = (659 - j\,233)\ \Omega$$

Spannungsübertragungsmaß eines Tiefpasses

Das Spannungsübertragungsmaß eines Tiefpasses, bestehend aus sechs gleichen T-Gliedern mit den Längswiderständen R = 10 kOhm und den Querkapazitäten C = 1 μF, soll für eine Frequenz von 50 Hz berechnet werden. Bei einem symmetrischen Vierpol ist ganz allgemein das Leerlaufübersetzungsverhältnis der Spannungen $\dfrac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{2l}} = \cosh \mathfrak{g}$.

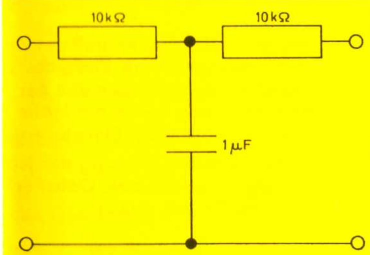


Abb. 85

Diese Gleichung wird benutzt, um zunächst für ein einzelnes Glied das Übertragungsmaß $\mathfrak{g}$ zu bestimmen.

Für $R = 10^4\ \Omega$ und

$Y = \omega \cdot C = 2\,\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}$ wird

$R \cdot Y = 3{,}14$

$$\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{2l}} = 1 + j\,R\,Y = 1 + j\,3{,}14 = \cosh \mathfrak{g}$$

$$\text{ar}\cosh (1 + j\,3{,}14) = \mathfrak{g} = x + j\,y$$

$$1 + j\,3{,}14 = a + j\,b$$

$$1 + a = 2 \qquad b = 3{,}142 \qquad M = 3{,}725 \qquad \text{vgl. Kap. 22.2}$$

$$1 - a = 0 \qquad b = 3{,}142 \qquad N = 3{,}142$$

$$(M - N) = 0{,}583$$

$$\cos y = {}^1/_2\,(M - N) = 0{,}2915 \qquad y = 73{,}05°$$

$$\sinh x = \frac{b}{\sin y} = \frac{3{,}142}{\sin 73{,}05°} = 3{,}285 \qquad x = 1{,}905$$

$$\mathfrak{g} = 1{,}905 + j\,73{,}05°$$

Bei 6 Gliedern addieren sich einfach die Übertragungsmaße, also

$$6\,\mathfrak{g} = 11{,}43 + j\,438{,}3° = 11{,}43 + j\,78{,}3°$$

Die Spannung am Ausgang des sechsten Gliedes ist $\mathfrak{U}_{7\,l}$ und das gesuchte Verhältnis wird:

$$\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{7l}} = \cosh 6\,\mathfrak{g} = \cosh\,(11{,}43 + j\,78{,}3°) = r\,\underline{/\varphi}$$

$$\tan\varphi = \tanh x \cdot \tan y$$
$$= 1 \cdot \tan y$$
$$\varphi = y = 78{,}3°$$

$$r = \sinh x \cdot \frac{\sin y}{\sin\varphi} = \sinh x \cdot 1$$

$$r = \sinh 11{,}43 \approx \frac{1}{2}\,e^{11{,}43} = \frac{1}{2}\,(e^{5{,}715})^2 = \frac{1}{2}\,305^2 = 4{,}66 \cdot 10^4$$

$$\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_{7l}} = 46600\,\underline{/78{,}3°}$$

Messung des Eingangswiderstandes einer Sende- oder Empfangs-Antenne

An eine Meßleitung mit dem Wellenwiderstand 60 Ω sei ein Kabel mit dem Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_0 = 60\ \Omega$ angeschlossen. Die Antenne am Ende des Kabels hat einen Scheinwiderstand, dessen Betrag und Phase als Funktion der Frequenz (hier ein einzelner Meßpunkt) gemessen werden sollen. Die Frequenz sei 100 MHz, was einer Wellenlänge von 3 m entspricht.

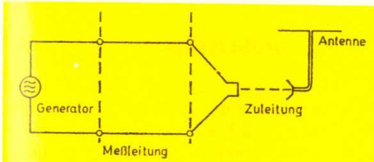


Abb. 86

Zum Eliminieren der Eigenschaft des Zuführungskabels aus der Messung werden zunächst die Klemmen am Ende des Zuführungskabels (also am Eingang des Meßobjektes) kurzgeschlossen und der Abstand l_1 des Spannungsminimums vom Ende der Meßleitung sowie die Höhe des Spannungsminimums und des Spannungsmaximums ermittelt. Daraus ergibt sich $U_{min} : U_{max} = m_1$. Anschließend wird bei einer zweiten Messung der Kurzschluß aufgehoben und das Meßobjekt an die Leitung angeschlossen. Dabei erhält man die entsprechenden Meßwerte l_2 und m_2. Die Meßwerte seien:

$$l_1 = 40\ \text{cm} \qquad m_1 = 0{,}15\ \ \text{(Kurzschluß)}$$
$$l_2 = 70\ \text{cm} \qquad m_2 = 0{,}70$$

Aus den Grundgleichungen der Leitungstheorie ergibt sich mit dem gesuchten Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}$ und dem Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_0$ der Reflexionsfaktor

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_0} = p\,\underline{/\psi}$$

An einer beliebigen Stelle der verlustlosen Leitung im Abstand x vom Leitungsende ist der Widerstand, den man beim Abtrennen des linken Leitungsteiles messen würde

$$\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{Z}_0} = \frac{\mathfrak{U}_x}{\mathfrak{Z}_0\,\mathfrak{I}_x} = \frac{e^{j\beta x} + \mathfrak{p}\cdot e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - \mathfrak{p}\cdot e^{-j\beta x}}$$

Im Spannungsminimum ist $\mathfrak{p}\cdot e^{-j\beta x}$ gerade um 180° in der Phase verschoben gegenüber $e^{j\beta x}$, so daß man für diesen Sonderfall schreiben kann

$$\frac{\mathfrak{Z}_{x\,min}}{\mathfrak{Z}_0} = \frac{1 + p\,\underline{/180°}}{1 - p\,\underline{/180°}} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Andererseits ist aber auch wegen der Subtraktion der Spannungen im Spannungsminimum und wegen der Addition im Spannungsmaximum das Spannungsverhältnis

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Dieses Spannungsverhältnis läßt sich meßtechnisch einfach ermitteln und gibt damit den Wert $\mathfrak{Z}_{x\,min}$, welcher im folgenden für die Auswertung gebraucht wird. Die rechnerische Behandlung des Problems wird wesentlich erleichtert, wenn der Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}$ als eine am Ende kurzgeschlossene Leitung mit Verlust aufgefaßt wird. Dann gilt:

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_0} = \tanh\,(a + j\,b)$$

Dabei ist $\mathfrak{g} = a + j\,b$ das Übertragungsmaß dieser gedachten Leitung, welche natürlich den Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_0$ haben muß. Für die vorgeschaltete Zuführungsleitung mit demselben Wellenwiderstand $\mathfrak{Z}_0$ und für den Abschnitt der Meßleitung bis zum Minimum werden dann nur die Übertragungsmaße addiert.

Für die gesamte Strecke von x_{min} bis zum Abschluß gilt:

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{Z}_{x\,min}}{\mathfrak{Z}_0} = \tanh\,(a + j\,b + a' + j\,b' + j\,b'').$$

Dabei ist $a' + j\,b'$ das Übertragungsmaß des Zuleitungskabels und $j\,b''$ das Übertragungsmaß des Abschnittes der Meßleitung bis zum Minimum, wenn die Meßleitung als verlustlos angenommen wird. Im Spannungsminimum haben wir reinen Ohmschen Widerstand. Diese Tatsache erleichtert die Bestimmung des Übertragungsmaßes.

$$(3) \qquad m_1 = \tanh\,(a' + j\,b' + j\,b_1'') = 0{,}15$$

$$(4) \qquad m_2 = \tanh\,(a + j\,b + a' + j\,b' + j\,b_2'') = 0{,}70$$

Wir kürzen die Schreibweise etwas ab, indem wir setzen:

$$a' + j\,b' + j\,b_1'' = \mathfrak{g}_1 \qquad b_2'' - b_1'' = \delta$$

Mit diesen Bezeichnungen lauten die beiden Gleichungen

$$(3') \qquad m_1 = \tanh\,\mathfrak{g}_1 = 0{,}15$$

$$(4') \qquad m_2 = \tanh\,(\mathfrak{g}_1 + a + j\,b + j\,\delta) = 0{,}70$$

$\mathfrak{g}_1$ kann als reelle Größe in Skala Th des Rechenstabes abgelesen werden, wenn der Läufer über m = 0,15 der Skala D gestellt wird. $\mathfrak{g}_1 = 0{,}1512$.

Entsprechend wird

$$\mathfrak{g}_1 + a + j\,b + j\,\delta = 0{,}867$$
$$a + j\,b + j\,\delta = 0{,}867 - 0{,}1512 = 0{,}7158$$

Aus dieser Gleichung folgen $a = 0{,}716$, $b = -\delta$. Der Wert δ ergibt sich aus der Verschiebung des Minimumpunktes von der ersten Messung zur zweiten Messung. Die Übertragungskonstante γ der verlustlosen Meßleitung ist eine reine Winkelkonstante, weil das Dämpfungsglied α fehlt. Danach ist $\gamma = j \cdot \beta$ und damit wird das Übertragungsmaß für den Unterschied der beiden Minimumabstände $j\,\delta = j\,\beta\,(l_2 - l_1)$. Ganz allgemein ist $\beta \cdot \lambda = 2\,\pi$, damit wird:

$$j\,\delta = j \cdot 2\,\pi \cdot \frac{l_2 - l_1}{\lambda} = j\,2\,\pi\,\frac{70 - 40}{300}$$

$$j\,\delta = j \cdot 2\,\pi \cdot 0{,}1$$

oder im Gradmaß $\quad j\,\delta = j\,360° \cdot 0{,}1 = j\,36°$

Damit ist der ganze Ausdruck bekannt $\mathfrak{g}_1 = a + j\,b = 0{,}716 - j\,36°$. Es bleibt nun noch die Aufgabe zu lösen, mit Hilfe der Ausgangsgleichung (1) $\mathfrak{Z}$ zu bestimmen aus

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_0} = \tanh\,(a + j\,b) = \tanh\,(0{,}716 - j\,36°)$$

Zur Ausrechnung dieses Ausdruckes sei auf Kap. 20.3 verwiesen.

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_0} = \tanh\,(0{,}716 - j\,36°) = \frac{0{,}977\,\underline{/-\,49{,}8°}}{1{,}125\,\underline{/-24{,}05°}} = 0{,}868\,\underline{/-\,25{,}8°}$$

Damit wird der gesuchte Scheinwiderstand

$$\mathfrak{Z} = 60 \cdot 0{,}868\,\underline{/-\,25{,}8°} = 52{,}1\,\underline{/-25{,}8°} = (47 - j\,22{,}6)\ \Omega$$

24. Der Läufer und seine Marken

24.1 Die Marke 36

Der Läufer hat auf der Vorderseite (Abb. 87) rechts oben einen kurzen Strich, der auf den Skalen CF/DF den Wert 36 angibt, wenn der Mittelstrich über dem Anfang der Skalen C/D steht. Auf diese Weise multipliziert man mit 36, wenn man bei beliebiger Läuferstellung von C/D nach CF/DF überwechselt; dadurch bietet der Läufer bequeme Umrechnungen für:

1 Stunde	= 3600 Sekunden
1 m/s	= 3,6 km/h
1°	= 3600″
100 %	= 360°
1 Jahr	= 360 Tage
1 kWh	= $3{,}6 \cdot 10^6$ J
$\varkappa_{Al}$	= $36\,\frac{m}{\Omega\,mm^2}$ (Leitwert)

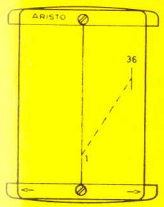


Abb. 87

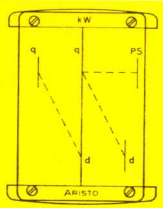


Abb. 88

24.2 Kreisflächen, Gewicht von Flußstahlstangen

Auf der Rückseite des Läufers (Abb. 88) gibt der Abstand vom Mittelstrich zum linken oberen und zum rechten unteren kurzen Strich den Faktor $\pi/4 = 0{,}785$ (bezogen auf die Quadratskalen) zur Berechnung von Querschnitten (Kreisflächen) nach der Formel $q = d^2\,\pi/4$ an. Steht der mittlere Läuferstrich über dem Durchmesser d auf Skala D, kann der Querschnitt links oben auf Skala A abgelesen werden.

Die gleiche Beziehung besteht auch zwischen dem rechten unteren und dem mittleren Strich. Da der Strichabstand gleichzeitig dem spezifischen Gewicht 7,85 g/cm³ von Flußstahl entspricht, kann – anschließend an die Querschnittsablesung am Mittelstrich – das Gewicht von Flußstahlstangen für die Längeneinheit am linken Strich abgelesen werden. Zieht man den Anfang der Zungenskala B schließlich unter diesen linken oberen Strich, so erhält man beim Verschieben des Läufers das Gewicht für jede beliebige Länge.

24.3 Die Marken kW und PS

Der Abstand zwischen dem Mittelstrich und der rechten oberen Marke gibt in den Quadratskalen den Faktor für die Umwandlung von kW in PS und umgekehrt an (s. Abb. 88).

Stellt man z. B. den Mittelstrich auf 20 kW, so gibt die obere rechte Marke 27,2 PS an. Umgekehrt liefert die Einstellung von 7 PS mit der rechten Marke am Mittelstrich 5,15 kW. Für Umrechnungen im Zollsystem gibt es einen Spezialläufer mit der Marke HP. Dieser Läufer ist unter der Bezeichnung 0972 E erhältlich.

25. Der Normzahlen-Maßstab 1364

25.1 Aufbau der Normzahlen-Skala

Normung und Typisierung sind wichtige Faktoren jeder rationellen Fertigung geworden; damit erlangen die Normzahlen (NZ) in der Technik immer mehr Bedeutung. Die Normzahlen nach DIN 323 sind ausgewählte Werte einer geometrischen Reihe, die auf das dekadische Zahlensystem zugeschnitten sind. Die Zusammenhänge werden beim Betrachten der logarithmischen Teilung D und der dazugehörigen Mantissenskala L sehr deutlich.

Gegenüber den gleichmäßig gestuften Mantissenwerten der Skala L stehen in Skala D die dazugehörigen Numeri. Die Normzahlen nach DIN 323 sind Abrundungen dieser Numeri.

Aus den Skalen L und D entsteht die darüberliegende NZ-Skala, wenn man die D-Skala fortläßt und die Normzahlen an die entsprechenden Teilstriche der vereinfachten Mantissenskala anschreibt.

Den zehn bezifferten Teilstrichen der oberen Mantissenteilung stehen die Normzahlen der Reihe R 10 gegenüber. Die Aufteilung der Mantissenteilung in 20 gleiche Teile führt zu den Normzahlen der Reihe R 20 und aus 40 gleichen Intervallen wird die Reihe R 40 gebildet.

Neben dem mm-Maßstab sind die NZ-Werte zusätzlich markiert, und zwar die Reihe: R 10 mit Pfeilspitzen, R 20 mit Strichen und R 40 mit Punkten.

25.2 Zweck der NZ-Skala

In erster Linie soll die NZ-Skala eine Gedächtnisstütze sein, so daß die gebräuchlichsten NZ-Werte immer zur Hand sind. Ferner ist sie praktisch für die Herstellung einfacher und doppeltlogarithmischer Netze auf gewöhnlichem kariertem Papier für übersichtliche nomographische Auswertungen. Da das Multiplizieren und Dividieren von Normzahlen mit bzw. durch Normzahlen immer wieder eine Normzahl ergibt, wird eine Netztafel aus Normzahlen zur graphischen Rechentafel.

Die Vereinigung von Normzahlen und Mantissen in einer Skala hat den Vorteil, daß logarithmische Überschlagsrechnungen sehr vereinfacht werden, denn den Normzahlen stehen in der Mantissenskala einfache Logarithmen gegenüber, die leicht im Kopf addiert oder subtrahiert werden können. Durch Hinzufügen der Kennziffern (wie beim Rechnen mit der Logarithmentafel) erhält man ein im Stellenwert richtiges Ergebnis, das um höchstens 3% ungenau ist.

In vielen Fällen kann man sich gleichfalls der NZ-Skala bedienen, wenn man großzügig abrundet, z. B. für $\pi = 3{,}15$ oder für $\gamma = 7{,}85$ den Wert $\gamma = 8$ setzt. Die den Normzahlen entsprechenden Mantissen werden aus der über den Normzahlen liegenden Mantissenskala abgelesen. Besondere Aufmerksamkeit ist den Kennziffern zu schenken, da von diesen die Rechensicherheit wesentlich abhängt.

Bei umfangreichen Formeln ist es vorteilhaft, die Logarithmen beim Ablesen aufzuschreiben, um die Addition nachprüfen zu können. Natürliche Zahlen kleiner als 1 (z. B. 0,8) werden oft besser durch negative Logarithmen ausgedrückt, z. B. $\lg 0{,}8 = -0{,}1$ statt $\lg 0{,}8 = 0{,}9 - 1$.

Die Teilungen L und D erlauben eine genauere logarithmische Rechnung, denn sie bilden eine dreistellige graphische Logarithmentafel.

25.3 Logarithmische Maßstäbe

Für das genauere Auftragen von logarithmischen Skalen oder Netzen befinden sich auf dem NZ-Maßstab logarithmische Teilungen der Basislängen 200 mm, 150 mm, 100 mm, 50 mm und 25 mm. Die Basislängen 125 mm und 250 mm können der Rechenstabzunge entnommen werden.

25.4 Umrechnungsfaktoren für nichtmetrische Einheiten

Beim Studium englischer und amerikanischer Fachbücher bereiten die nichtmetrischen Einheiten große Schwierigkeiten, weil die Beziehungen zum metrischen System oft mühselig in der Literatur gesucht werden müssen. Diese Sucharbeit nehmen die Tabellen des Maßstabes weitgehend ab, weil darauf die wichtigsten Umrechnungsfaktoren zusammengestellt sind. Als Grundlage diente hauptsächlich U. Stille, Messen und Rechnen in der Physik, Verlag Vieweg & Sohn.

25.5 Veröffentlichungen über Normzahlen

Berg, S.: Angewandte Normzahl, Berlin und Köln 1949.

Kienzle, O.: Normungszahlen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Tuffentsammer, K., und P. Schumacher: Normzahlen — die einstellige Logarithmentafel des Ingenieurs. Werkstattstech. und Masch.-Bau 43 (1953), S. 156.

Tuffentsammer, K.: Das Dezilog, eine Brücke zwischen Logarithmen, Dezibel, Neper und Normzahlen. VDI-Zeitschrift 98 (1956), S. 267/74.

Strahringer, W.: Zauberwelt der Normzahlen, Verlags- und Wirtschaftsgesellschaft der Elektrizitätswerke m. b. H. VWEW, Frankfurt a. M. 1952.